

Задачи для подготовки к семестровой контрольной «Алгебра логики, комбинаторика, теория графов» (ФУПМ)

Преамбула

Контрольная пройдёт в воскресенье 10 ноября с 10:30 до 13:55 (общее время, включая рассадку по аудиториям, выдачу вариантов и сбор работ). О распределении по аудиториям будет сообщено позднее на странице <http://www.rubtsov.su/alctg19>. На контрольной нельзя использовать никакие вспомогательные материалы! В случае обнаружения справочных материалов (шпаргалок), мобильного телефона (или иной техники) студент будет удалён с контрольной, а за контрольную будет выставлена оценка 0 (хуже, чем «неуд (1)»).

В контрольной будет три типа задач. Задачи первого типа требуют только ответ и затрагивают классические факты из курса. В задачах второго типа требуется сформулировать определение и ответить на контрольный вопрос. Задачи третьего типа — содержательные задачи на владение материалом курса, подобные задачам из классных и домашних работ.

В контрольную войдут все темы до «Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты» включительно (первая не вошедшая тема — комбинаторика III).

При подготовке к контрольной помните, что вряд ли хотя бы одну задачу получится решить правильно, если вы не знаете определений.

Вариант для подготовки

В скобках после номера задачи указано число баллов за задачу. На контрольной будет вариант, близкий по духу к данному, однако число задач может отличаться, как и соответствие задач темам.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ.

1(1). Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число всевозможных функций f .

2(2). Найдите число пятиэлементных подмножеств множества

$$\{2n \mid -1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{Z}\},$$

содержащих число 14. Ответом должно быть число в десятичной записи.

3(2). Сколько не обязательно осмысленных слов можно получить, переставляя буквы в слове «ГОЛОСЛОВНЫЙ»?

4(2). Найдите число связных подграфов на трёх вершинах графа K_5 .

5(2). Найдите число различных правильных раскрасок графа-пути длины 5 в три цвета.

Приведите определение и обоснованно ответьте на вопрос.

6 (3). Полный прообраз. Функция f из множества $\{1, 2, \dots, 8\}$ в множество $\{a, b, c, d, e\}$ определена следующим образом

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите полный прообраз множества $\{a, b, c\}$.

7 (3). Биекция. Найдите число различных биекций между двоичными словами длины 3 и множеством чисел $\{0, 1, \dots, 7\}$.

8 (4). Независимое множество. Найдите число независимых множеств размера 17 у графа-пути P_{99} (пути длины 99).

Приведите обоснованные решения

9 (4). Существует ли граф на семи вершинах со степенями вершин $(1, 2, 2, 2, 5, 5, 5)$?

10 (5). Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид

$$f = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus (a_2 \wedge x_2) \oplus \dots \oplus (a_n \wedge x_n).$$

Выразите с помощью коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n **а)** число её фиктивных переменных;
б) число единиц в её векторе значений.

11 (6). G — связный граф на $n \geq 2019$ вершинах, который не является графом-путём. Докажите, что в нём найдутся такие три вершины, что при удалении любой из них (вместе со всеми смежными рёбрами) останется связный граф.

12 (6). Пересечение 9 множеств состоит ровно из 1 элемента. А пересечение любых восьми из этих множеств содержит ровно 12 элементов. Может ли в объединении этих множеств быть меньше 100 элементов?

13 (7). Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?