АЛКТГ::Семестровая контрольная I 2020

Указания, решения и критерии проверки

Критерии описывают только типовые случаи, выявленные при проверке, но не являются исчерпывающими. В случае некритериальных случаев проверяющий при простановки баллов исходит из значительности допущенных ошибок и доли верного решения задачи в тексте.

Описание критериев:

Критерии.

+1 Означает, что описанная в пункте часть решения стоит 1 балл.

-1 Означает, что за описанную в пункте ошибку снимается 1 балл.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

1 (2). Вектор значений булевой функции f имеет вид ?0?01111, где вместо знака ? можно поставить как 0, так и 1. Поставьте на места ? значения так, чтобы в получившейся булевой функции было ровно две фиктивных переменных.
Ответ: 00001111

2 (2). Известно, что $A \subseteq B \subseteq C$ и $A \subseteq D \subseteq E$. Возможно ли, что $B \cap D = \varnothing$ и $C \subseteq E$? При положительном ответе приведите пример множеств A, B, C, D, E.
Ответ: Да. $A = B = C = D = E = \varnothing$, $A = \varnothing$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{2\}$, $E = \{1, 2, 3\}$ и другие.

3 (2). Вычислить $f^{-1}(\{2, 3, 4\})$, где f — отображение из множества $\{a, b, c, d, e\}$ в $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$f : a \mapsto 1, \quad b \mapsto 2, \quad c \mapsto 4, \quad d \mapsto 2, \quad e \mapsto 1.$$

Ответ: $\{b, c, d\}$

4 (2). Приведите пример графа на 5 вершинах, у которого ровно 5 остовных деревьев.
Ответ: C_5

5 (3). Какое максимальное число компонент связности может быть в графе на 10 вершинах и 10 рёбрами?
Ответ: 6

Приведите определение. Обоснованно ответьте на вопрос, опираясь на определение

Критерии. (Для всех задач раздела.)

+1 Верное определение.

+2 Верный ответ на контрольный вопрос.

6 (3). Отображение. Пусть $f : A \to B$ отображение, которое переводит конечное множество в конечное. Какие из знаков « $\leqslant$ », « $\geqslant$ », « $=$ » можно подставить в формулу вместо « ? » (так чтобы она стала верной)?

$$|A| \ ? \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})|.$$

Ответ: «Все знаки». Также засчитывается ответ только «=», в случае если из логики решения следует, что можо поставить все знаки.

Указания. Рассмотрим отображение в виде двудольного графа. В правой части формулы считается число левых концов всех рёбер. Поскольку отображение всюду определено, то число рёбер совпадает с числом точек в множестве A.

7 (3). Контрапозиция. Постройте контрапозитивное утверждение (примените закон контрапозиции) к утверждению «Если в графе на 2020 вершинах есть вершина степени 100, то в нём хотя бы 2020 рёбер».

Указания. Утверждение в задаче имеет вид $(A \land B) \to C$, где $A =$ «в графе 2020 вершин», $B =$ «в графе есть вершина степени 100», $C =$ «в графе хотя бы 2020 рёбер». Соответственно ответ на естественном языке должен иметь вид $\neg C \to \neg(A \land B)$ или $\neg C \to (\neg A \lor \neg B)$.

Критерии.

- Формулировка контрапозиции $(X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$ засчитывается как эквивалентная.

-1 Утверждение из задачи интерпретированно как $B \to C$ (где B и C описаны в указании).

8(3). Независимое множество. Пусть T_{2020} — множество всех деревьев на вершинах $\{1, 2, \ldots, 2020\}$, а $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G. Найдите $\max\limits_{G \in T_{2020}} \alpha(G)$.

Приведите обоснованные решения

9 (4). Сколько рёбер в дереве, в котором некоторые 6 вершин имеют степени 7, 6, 5, 4, 3, 2 (все степени встречаются по разу), а остальные вершин — висячие (имеют степень 1)?

Критерии.

- -1 В случае решений, которые опираются только на формулы со степенями вершин, не нарисован пример, на котором достигается ответ. Из того, что сумма некоторых $|V|$ чисел равна чётному числу, не первосходящему $\frac{|V|(|V|-1)}{2}$, ещё не следует существование графа с соответсвующим набором степеней вершин.

10 (5). A, B и C — конечные множества, при этом $f : A \to B$ — инъекция, $g : B \to C$ — сюръекция, и отображение h, определёное как $h(a) = g(f(a))$ — инъекция. Следует ли отсюда, что $|A| = |C|$?

Критерии.

- +2,5 Верный ответ с объяснением, что получившаяся инъекция не обязательно биекция, но без контрпримера.

11 (5). Семейство $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ состоит из конечного числа произвольных (не обязательно конечных) множеств. Существует ли семейство $\mathcal{M} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся множеств ($\forall i, j$ $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$), такое что любое множество A_i представляется в виде конечного объединения множеств из $\mathcal{M}$? Формально $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists I \subseteq \{1, \ldots, m\} : A_i = \bigcup\limits_{j \in I} B_j$.

Критерии.

- -1 Если построено верное семейство множеств, но не доказано, что каждое A_i можно получить в виде объединения B_i.
- -1 Если построено верное семейство множеств, но не доказано, что $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

12 (5). Назовём граф G хрупким, если он 3-раскрашиваемый, но при удалении из него любой вершины (со всеми смежными рёбрами) получается двураскрашиваемый граф G'. Опишите все хрупкие графы (не забудьте доказать, что вы описали все графы и только их).

Критерии.

- -1 В решении считается, что 3-раскрашиваемые графы не являются 2-раскрашиваемыми, поэтому в ответ не добавлены двудольные графы.
- -2 Не доказано, что в графе, состоящем из одного нечетного цикла, не могут быть проведены другие ребра.
- 0 Если есть упоминание про добавление к циклам нечётной длины любых вершин, не входящих в них (изолированных,состоящих в независимых от нечётного цикла циклах чётной длины и т.д.).