АЛКТГ::Семестровая контрольная II 2020

Ответы, указания и критерии проверки

Описание критериев:

Критерии.

+1 Означает, что описанная в пункте часть решения стоит 1 балл.

-1 Означает, что за описанную в пункте ошибку снимается 1 балл.

2 По-умолчанию означает максимальный балл (2) за описанный случай. Иные трактовки поясняются.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Запишите ответ сразу после условия задачи! Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ. В следующих разделах после условия задачи запишите её решение. Ответы нужно отправить на адрес alctg@rubtsov.su. В теме письма должны быть **ФИО и номер группы**. Если картинок больше двух, то пришлите pdf с фото в правильном порядке и в правильной ориентации.

1 (2). Постройте КНФ-разложение для булевой функции, заданной вектором значений: 01101110.
Ответ: $(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) = (x \vee y \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})$.

2(3). Перечислите классы Поста, которым принадлежит булева функция, заданная вектором значений 10100011.
Ответ: T_1.

Критерии.

0 Если есть ещё что-то кроме T_1

3 (3). На каждом борту лодки сидят по 3 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 кандидатов хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а остальным 9 безразлично, где сидеть? (При выборе команды не учитывается рассадка людей в лодке, однако все желания членов команды должны быть выполнимы.)
Ответ: 586062.

4 (3). Найдите количество частичных функций $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$, таких, что $\forall y \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \exists x : f(x) = y$. (Можно оставить ответ в виде суммы.)
Ответ: $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m + 1 - k)^n$

Критерии.

0 Неправильный ответ (не считая случая незначительных описок)

5 (3). Операция транспонирования ориентированного графа меняет направление каждого ребра. Транспонированный граф обозначим через G^T. Приведите пример ориентированного графа G на шести вершинах, в котором ровно три компоненты сильной связности, есть ровно один источник и ровно один сток (вершины входящей степени ноль и исходящей степени ноль соответственно), и при этом граф G^T изоморфен графу G. Явно укажите изоморфизм.

Критерии.

-1,5 Не указан изоморфизм, или указанный изоморфизм неверен.

-0,5 В графе есть петли или кратные рёбра.

6 (3). Сколько способов поставить на доску 8×8 две одинаковых ладьи, чтобы хотя бы одна была на главной диагонали (одной из двух самых длинных), и обе не били друг друга? (Все клетки считаются занумерованными, т.е. симметрии доски не учитываются.) Ответом должно быть число в десятичной записи.
Ответ: 364 (1 диагональ) или 680 (2 диагонали).

Критерии. Поскольку в задаче внезапно всплыли тонкости русского языка (условие написано согласно правилам оного, но мы с коллегами решили простить тех, кто решил, что главная диагональ единственная), то мы решили засчитывать два ответа.

7 (4). Приведите пример бинарного отношения, которое одновременно является нерефлексивным, симметричным, нетранзитивным.

Критерии.

0 Пример не удовлетворяет хотя бы одному из требований.

Приведите обоснованные решения

Общие положения. Критерии описывают типовые ошибки, но не являются исчерпывающими. В некритериальных случаях проверяющих исходит из близости случая к критериальному или из следующих соображений (баллы выставляются из близости к случаю):

+. полный балл — задача решена с незначительными

$\pm$ $\frac{3}{4}$ баллов — задача решена, но с недочётами, которые не являются незначительными.

$\frac{+}{2}$ $\frac{1}{2}$ баллов — задача решена на половину или есть значительный прогресс в сторону верного решения

$\mp$ от 0,5 до $\frac{3}{4}$ баллов (стандарт — 1 балл) — задача не решена, но есть продвижения или верная идея решения.

8(3). Интерпретируем вершины ориентированного ациклического графа как задачи, которые необходимо выполнить. Ребро $u \to v$ означает, что перед выполнением v должна быть выполнена u. Расписанием f называется нумерация вершин (положительными целыми числами):

$f : V \to \mathbb{N}_1$, при этом для каждого ребра $u \to v$ справедливо $f(u) < f(v)$. Смысл нумерации в том, что задачи с номером t выполняются во время t. Расписание называется оптимальным, если максимальное значение f минимально, то есть все задачи можно (параллельно) выполнить за минимальное время, не нарушая ограничений. Найдите минимально возможное число вершин n и ориентированный ациклический граф G, для которого существует более одного оптимального расписания.
Ответ: 3

Критерии.

- 0 Неверно найдено n
- -1.5 Не доказано, что $n \geqslant 3$

9 (4). Найдите число (частичных) порядков на множестве $U = \{1, 2, \ldots, 8\}$, в которых ровно три минимальных элемента, есть хотя бы один наибольший элемент, а остальные элементы (не минимальные и не наибольшие) сравнимы со всеми элементами из U.
Ответ: $\binom{8}{3} \times 5!$ (а также $2 \times \binom{8}{3} \times 5!$)

Критерии.

- 0 Неверный ответ (не считая описок).
- 0 Ответ вида $\sum\limits_{x \in U} \chi_A(x)$ (сумма единиц по всем элементам множества)
- +1 Дан правильный ответ (не подпадающий под предыдущий пункт правильный ответ гарантирует хотя бы 1 балл за задачу).
- Засчитываются ответы, учитывающие как число и рефлексивных и антирефлексивных порядков, так и учитывающие число только порядков одного из типов.

10 (5). Сколько различных (неподобных) слагаемых содержит выражение $(a^2 + b + c - d)^{100}$ после раскрытия скобок?
Ответ: $\binom{103}{3}$

Критерии.

- 0 Неправильный ответ
- 0 Ответ вида $\sum\limits_{x \in U} \chi_A(x)$ (сумма единиц по всем элементам множества)
- +1 Дан правильный ответ (не подпадающий под предыдущий пункт правильный ответ гарантирует хотя бы 1 балл за задачу).
- -1 Нет обоснования того, что мономы не взаимноуничтожаются.

11 (5). В игре «нарды» есть 15 чёрных и 15 белых шашек, причем они стоят на 24 полях так, что каждое поле либо занято только чёрными шашками, либо занято только белыми шашками, либо вообще не занято (несколько шашек могут стоять на одном поле столбиком). Сколько существует расстановок шашек по такому полю? Допустимо представить ответ в виде суммы не более, чем 100 слагаемых. Такую сумму упрощать не требуется.
Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{15} \binom{24}{k}\binom{14}{k-1}\binom{38-k}{15} = 1411634290044494552.$

Критерии.

- 0 Неправильный ответ
- 0 Ответ вида $\sum\limits_{x \in U} \chi_A(x)$ (сумма единиц по всем элементам множества)
- +1 Дан правильный ответ (не подпадающий под предыдущий пункт правильный ответ гарантирует хотя бы 1 балл за задачу).
- 1 За верную сумму длины больше 100 (Задача оценивается максимум из 1 балла)

Замечание: выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{15} \sum\limits_{m=1}^{\min(15,24-k)} (\ldots)$ — сумма из 204 слагаемых.

12(6). Определим множество $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Сколько существует последовательностей его подмножеств $T_1, T_2, \ldots, T_k$, таких, что пересечение любых четырех подмножеств из последовательности пусто?
Ответ: $\left(\binom{k}{3} + \binom{k}{2} + \binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right)^n$

Критерии.

- 0 Ответ вида $\sum\limits_{x \in U} \chi_A(x)$ (сумма единиц по всем элементам множества)
- +1 Дан правильный ответ (не подпадающий под предыдущий пункт).