Указания, решения и критерии проверки

Описание критериев:

Критерии.

+1 Означает, что описанная в пункте часть решения стоит 1 балл.

-1 Означает, что за описанную в пункте ошибку снимается 1 балл.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Критерии. По-умолчанию за верный ответ на задачу в этом разделе ставится полный балл, а за неверный — 0.

1(2). Постройте ДНФ-разложение для булевой функции, заданной вектором значений 01010010.

Ответ: $\neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3$

2 (3). Укажите все верные утверждения.

а) $\varnothing \in \{\varnothing \setminus \varnothing\}$; **б)** $\varnothing \subsetneq \{\varnothing \cup \{\varnothing\}\} \cap \{\varnothing\}$; **в)** $\varnothing \times \varnothing = 2^{\{\varnothing\}}$; **г)** $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \binom{\varnothing}{n} \subseteq \varnothing$;

Ответ: а, г.

Критерии.

1,5 Одна ошибка.

0,5 Две ошибки.

0 Три и более ошибки.

3 (2). Сколько неизоморфных графов на 2021 вершинах, в которых $\binom{2021}{2} - 2$ рёбер?

Ответ: 2

4 (3). Имеется 7 шаров разных цветов, которые нужно разложить по 4 разным коробкам так, чтобы в каждой коробке был хотя бы один шар. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ:

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{4}{k}(4-k)^7 = \binom{7}{4}4! + \binom{7}{3}\binom{4}{2}4! + \binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}4 = \frac{7!}{3!} + \frac{7!4!}{3!2!2!} + \frac{7!5!3!4}{2!5!2!3!2!1!}$$

$$= 7!\left(\frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2}\right) = 7!\frac{10}{6} = 8400$$

5 (4). Сколькими способами можно составить множество из 10 чисел от 0 до 2021, так чтобы разность между любыми двумя была не меньше 50? Ответ дайте в виде одного биномиального коэффициента

Ответ: $\binom{(2021 - 50 * 9 + 10)}{10} = \binom{1581}{10}$

6 (4). Отметьте все справедливые утверждения (и только их). (Запишите в ответ номера, если пишете онлайн)

- ☐ 1. Если бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ на конечном множестве A симметрично, то $|R|$ — чётное число.
- ☐ 2. Если бинарное отношение R транзитивно, то и обратное к нему отношение R^{-1} тоже транзитивно.
- ☐ 3. Если B и C — пересекающиеся классы эквивалентности (отношения эквивалентности R), то $B \triangle C = \varnothing$.
- ☐ 4. Отношение R не может быть и симметричным, и антисимметричным одновременно.
- ☐ 5. Если отношение R транзитивно, то оно обязательно рефлексивно.
- ☐ 6. Пусть P и Q — отношения на конечном множестве A. Справедливо $|P \circ Q| > |P| + |Q|$.

Ответ: 2,3

Критерии.

3 Одна ошибка

1,5 Две ошибки

0,5 Три ошибки

0 Четыре и более ошибки

Приведите определение и обоснованно ответьте на вопрос

7 (3). *Характеристическая функция.* Пусть A, B, и C — произвольные множества. Выразите характеристическую функцию для множества $[((C \cup B) \setminus (C \cap B)) \triangle A \triangle (B \triangle C)] \setminus A$ через характеристические функции для множеств A, B, C и арифметические операции $(+, -, \times, /)$
Решение:

$$[((C \cup B) \setminus (C \cap B)) \triangle A \triangle (B \triangle C)] \setminus A = [(C \triangle B) \triangle A \triangle (B \triangle C)] \setminus A =$$
$$= [(C \triangle B) \triangle (B \triangle C) \triangle A] \setminus A = [\varnothing \triangle A] \setminus A = A \setminus A = \varnothing$$

Тогда $\chi(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)$.

Критерии.

+1 Верное определение.

-1 (оценивается из двух баллов) Определение неверное/отсутствует.

-2 (оценивается из одного балла) Характеристическая функция отлична от нуля.

8 (3). *Полный прообраз.* Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — всюду определённые функции и $A \subseteq X$. Обозначим $C = g(f(A))$. Верно ли, что $f(A) = g^{-1}(C)$? Если это верно, докажите, если нет, приведите пример.
Решение: Утверждение неверно, приведём контрпример

$$\begin{aligned}&X = \{1,2\},\ Y = \{1,2\},\ Z = \{1\},\ A = \{1\},\\ &f(x) = 1,\ g(y) = 1.\\ &C = g(f(A)) = g(1) = 1;\ g^{-1}(1) = \{1,2\} \neq \{1\}\end{aligned}$$

Критерии.

+1 Верное определение.

-1 (оценивается из двух баллов) Определение неверное/отсутствует.

-2 (оценивается из одного балла) «Доказывают» истинность утверждения.

9 (5). *Самодвойственная булева функция.* Посчитайте количество булевых функций от n переменных, которые являются одновременно несамодвойственными и нелинейными.

Решение. Заметим, что число самодвойственных булевых функций равно $2^{2^{n-1}}$ (для задания самодвойственной функции достаточно задать первую половину таблицы истинности, а оставшаяся достраивается однозначно).

Для линейных функций справедливо следующее. Если число существенных переменных чётно, то при инверсии вектора аргументов чётность сохраняется, как и значение функции, то есть она несамодвойственна. Если число существенных переменных нечётно, то при инверсии вектора аргументов чётность меняется, как и значение функции, то есть она самодвойственна. (Переменная x_i линейной функции $a_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ существенна тогда и только тогда, когда $a_i = 1$.)

Таким образом, число линейных, но не самодвойственных функций равно

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

Тогда число несамодвойственных и нелинейных функций равно

$$\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}\right) - 2^n$$

Критерии.

+1 Верное определение.

-1 (оценивается из 4 баллов) Определение неверное/отсутствует.

+1 За каждое верно посчитанное слагаемое в формуле включений-исключений

Приведите обоснованные решения

10 (5). В графе G вершины — булевы векторы размерности n. Две вершины соединены, если соответствующие строки отличаются ровно в двух позициях. Найдите количество компонент связности G.

Указания. В этом графе две компоненты связности, причём вершины в одной КС различаются в чётном числе позиций. Докажем это.

Пусть $\rho(u, v)$ — число различных позиций. Рассмотрим случай $\rho(u, v) = \rho(v, w) = 2$. Тогда различные позиции между w и v:

- либо те же, что у u и v, тогда $w = u$ (различается в четном числе позиций);
- либо не те же, что у u и v, тогда $\rho(u, w) = 4$ (четное);
- либо одна та же, другая не та же, что у u и v, тогда $\rho(u, w) = 2$ (четное).

Обобщим. Пусть $\rho(u, v)$, $\rho(v, w)$ — четные. Тогда позиции, различные у v и w, могут пересекаться с позициями, различными у u и v, либо по четному числу позиций (тогда в итоге будет четное число позиций), либо по нечетному (тогда уйдёт одно нечётное и прибавится другое нечётное число).

Значит, если разница в нечётном числе позиций, то вершины не связаны. Если же в чётном — можно явно построить путь (доказательство индукцией по числу различий между вершинами).

Итого две компоненты связности.

Критерии.

+1 Сказано, что из вершин с чётным числом единиц нельзя добраться до вершин с нечётным числом единиц

-2 Доказательство в одну сторону (либо только, что из достижимости следует чётность разности, либо только что из чётной разности следует достижимость)

11(6). Простой неориентированный граф G получается из цикла $C_{100}, V(C_{100}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{100}\}$ добавлением вершины u и соединением её ребром с каждой вершиной цикла. Ориентированный граф G' получен из графа G введением ориентации так, что в каждую вершину входит хотя бы одно ребро, и из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро. Докажите, что получившийся ориентированный граф сильносвязен.

Решение. Докажем, что из всякой вершины в множестве $S = \{v_1, \ldots, v_{100}\}$ можно попасть в вершину u. Возьмем произвольную вершину в S, из нее выходит хотя бы одно ребро. Если это ребро ведет в u, цель достигнута. Пусть ребро ведет в другую вершину из S. Если ребро выходящее из этой новой вершины ведет в u, то вновь цель достигнута. Иначе перейдем по выходящему ребру вновь в вершину из S. Повторяя таким же образом, мы будем на каждом шаге либо переходить в вершину u, либо продолжать движение по циклу на вершинах из S. Если мы пройдем по всему циклу так и не перейдя в вершину u, то получится, что ни из какой вершины S нет выходящего ребра в u. Значит в вершине u все ребра исходящие, противоречие. Значит, мы рано или поздно перейдем в вершину u.

Докажем теперь, что из вершины u можно попасть в любую вершину из S. Заменим в все ориентированные ребра в графе на противоположные. Условие задачи вновь выполняется, так что по доказанному из произвольной вершины S есть путь в u. Следовательно, в изначальном графе есть обратный путь из u в произвольную вершину S.

Осталось доказать, что есть путь между любыми двумя вершинами из S. Для этого можно сначала из первой вершины S перейти в u, а затем из u пройти во вторую вершину S.

Критерии.

6 В решении аналогичном приведенному опущен последний шаг.