Указания, решения и критерии проверки

Описание критериев:

Критерии.

+1 Означает, что описанная в пункте часть решения стоит 1 балл.

-1 Означает, что за описанную в пункте ошибку снимается 1 балл.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Запишите ответ сразу после условия задачи! Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ.

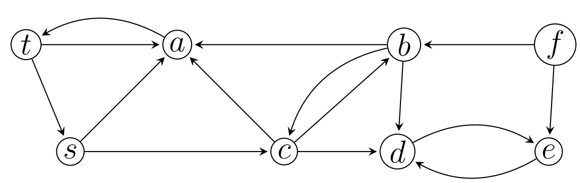
1(2). Постройте КНФ-разложение для булевой функции, заданной вектором значений 11011010.

Ответ: $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$

Критерии.

0 Неправильный ответ.

2 (2). Найдите компоненты сильной связности графа G (на рис. ниже) и опишите в ответе каждую компоненту.



Ответ: $\{t, a, s, c, b\}, \{d, e\}, \{f\}$

Критерии.

0 Неправильный ответ.

3 (3). Найдите вероятность того, что случайно выбранная булева функция от n переменных удовлетворяет следующему условию: она может принимать значение 1 только на входных наборах, содержащих ровно k единиц $(0 \leqslant k \leqslant n)$ (но не обязательно на всех таких наборах).

Ответ: $2^{\binom{n}{k}}/2^{2^n} = 2^{\binom{n}{k}-2^n}$

Критерии.

0 Неправильный ответ.

4 (3). Для произвольного конечного множества A определим

$$B = \bigcup_{0 \leqslant k < |A|} \binom{A}{k} = \{x \mid P(x)\}.$$

Выразите предикат $P(x)$, используя только отношения $\in$, $\subsetneq$ и $\subseteq$ и стандартные логические операции.

Ответ: $P(x) = x \subsetneq A$

Критерии.

3 Правильный ответ.

1 В ответе $\subseteq$ вместо $\subsetneq$.

0 В предикате присутствует B.

0 Другие предикаты, не эквивалентные правильному.

5 (3). У нас есть 7 шаров разного цвета (красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый) и 3 коробки разной формы (тетраэдр, куб, додекаэдр). Сколькими способами можно разложить эти 7 шаров в 3 коробки так, чтобы в каждой коробке был хотя бы 1 шар?

Ответ: $3^7 - \binom{3}{1} \cdot 2^7 + \binom{3}{2} \cdot 1^7 = 1806$

Критерии.

0 Неправильный ответ.

6 (4). Пусть A и B — произвольные множества булевых функций. Выберите верные утверждения:

1. $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))$;
2. $A \neq \mathrm{cl}(A)$;
3. $A = B \iff \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$;
4. $A \subseteq B \iff \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$;
5. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A \cup \mathrm{cl}(B))$;
6. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$;
7. $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cap \mathrm{cl}(B))$;
8. $\mathrm{cl}(A \cap B) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$;

Ответ: 1, 5, 7

Критерии.

−1 Одна ошибка.

−3 Две ошибки.

0 Три и более ошибки.

7 (4). Пусть $R \subseteq A^2$ — произвольное бинарное отношение. Выберите верные утверждения:

1. $R \cap R^{-1}$ рефлексивно.
2. $R^{-1} \circ R$ рефлексивно.
3. $R^{-1} \cap R$ симметрично.
4. $R \circ R^{-1}$ транзитивно.
5. $(R \circ R^{-1}) \setminus (R \cap R^{-1})$ антирефлексивно.
6. $R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1}$.
7. $R^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ R)^{-1}$.

Ответ: 3, 7

Критерии.

–1 Одна ошибка.

–3 Две ошибки.

0 Три и более ошибки.

Приведите определение и обоснованно ответьте на вопрос

8 (3). *Топологическая сортировка.* Известно, что в ориентированном ациклическом графе G есть 3 источника и 4 стока (при этом эти источники не совпадают со стоками). Приведите точную нижнюю оценку на число способов упорядочить вершины G в порядке топологической сортировки (т.е., такое число способов есть у любого графа G, удовлетворяющего условию, и лучшей оценки нет).

Решение. Можно рассмотреть подмножество перестановок, где все источники стоят раньше всех остальных вершин, а стоки — позже. Переставлять внутри себя источники можно произвольным образом. Аналогично стоки. Таким образом, искомая нижняя оценка — $3! \cdot 4!$. Она достигается: достаточно рассмотреть ориентированный полный двудольный граф, где левая доля — источники, правая — стоки (больше вершин нет). Так как любой источник должен быть раньше любого стока, переставлять можно только номера источников и стоков внутри соответствующей группы.

Критерии.

+1 За верное определение.

+2 За верный и обоснованный ответ на контрольный вопрос.

–1 Оценка без примера.

–1.5 Ответ и пример без верно обоснованной оценки.

9 (3). *Монотонная булева функция.* Приведите пример монотонной булевой функции от трёх переменных, у которой каждая переменная существенная. Задайте эту функцию полиномом Жегалкина.

Решение. Зададим пример такой функции сразу в базисе Жегалкина: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$. Все переменные существенны, а функция монотонна, так как равна 1 только на максимальном по отношению покоординатного порядка булевом векторе — 111.

Критерии.

+1 За верное определение («Функция монотонна, если её вектор значений монотонно возрастает» — неверно).

–2 Пример без доказательства.

–1 Не доказана монотонность или существенность переменных.

–1 Нет полинома.

10 (3). *Диаграмма Хассе.* Приведите пример нелинейного (частичного) порядка, который нельзя задать с помощью диаграммы Хассе.

Решение. Возможный пример: отношение покоординатного порядка на парах вещественных чисел: $(\leqslant) \times (\leqslant) \subseteq (\mathbb{R}^2)^2$. Это не линейный порядок, так как пары $(0, 1)$ и $(1, 0)$ несравнимы. В силу свойства непрерывности действительных чисел ($\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b\ \exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$), отношение непосредственного следования — пустое множество. Следовательно, данный частичный порядок нельзя задать диаграммой Хассе.

Критерии.

+1 За верное определение

+2 За верный и обоснованный ответ на контрольный вопрос

Приведите обоснованные решения

11 (3). Рассмотрим следующие множества отображений: $M_1 = \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \mid f(42) = 0\}$ и $M_2 = \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \mid f(2022) = f(2023)\}$. Существует ли биекция из M_1 в M_2? Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте свой ответ.

Решение. Да, существует. Приведём пример. Рассмотрим произвольную $f \in M_1$. Определим $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{42, 2022\}\ \ g(x) = f(x)$, $g(42) = f(2022)$, $g(2022) = f(2023)$. Заметим, что $g \in M_2$. Также заметим, что любая $g' \in M_2$ имеет прообраз из ровно одного элемента $f' \in M_1$: $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{42, 2022\}\ \ f'(x) = g'(x)$, $f'(42) = 0$, $f'(2022) = g'(42)$. Таким образом, приведено инъективное отображение из M_1 в M_2, также являющееся сюръекцией.

Критерии.

+2 Правильный ответ с обоснованием.

+1 Явно построенная биекция.

12 (4). Рассмотрим бинарное отношение $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\} \subseteq \{1,2,3\}^2$. Постройте граф отношения R^{2022}, где $R^k = R \circ R^{k-1}$.

Решение. Поскольку $R^2 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3)\}$ — отношение эквивалентности, $R^{2022} = (R^2)^{1011} = R^2$.

Критерии.

+3 Получено, что $R^{2022} = R^2$.

+1 Построен граф R^{2022}.

13 (4). Найдите номер слова «ВАВБАААБАБ» в алфавитном порядке среди всех слов, которые можно получить из данного перестановкой букв.

Решение. Порядковый номер слова равен числу слов, меньших его по отношению алфавитного порядка, плюс 1. Будем идти по буквам слева-направо, и выписывать число слов, у которых пройденные буквы равны соответствующим буквам из слова в условии задачи, а текущая буква — меньше.

$$N = \underbrace{\binom{9}{4,\ 3,\ 2} + \binom{9}{5,\ 2,\ 2}}_{\text{1-я буква меньше «В»}} + 0 + \underbrace{\binom{7}{3,\ 3,\ 1} + \binom{7}{4,\ 2,\ 1}}_{\substack{\text{перввые две буквы совп.,}\\ \text{3-я меньше «В»}}} +$$
$$+ \binom{6}{3,\ 3,\ 0} + 0 + 0 + 0 + \binom{2}{0,\ 2,\ 0} + 0 + 0 + 1 =$$
$$= 2283$$

Критерии.

+1 Использован факт, что число слов с заданным буквенным составом вычисляется через мультиномиальный коэффициент.

+1 Указана связь между числом слов с заданным буквенным составом и порядковым номером.

+2 Верно выписана итоговая сумма.

0.5 Верно решённая задача по поиску порядкового номера среди всех трёхбуквенных слов.

14 (6). Сколько существует перестановок чисел от 1 до 7, среди которых для любых двух соседних чисел правое не совпадает с левым, увеличенным на 1? Другими словами, среди двух соседних чисел не встречаются пары 12,23,34,45,56,67. Ответ представить в виде суммы не более 10 слагаемых.

Решение. Зафиксируем некоторый набор из k чисел, меньших семи; это можно сделать C_6^k способами. Число перестановок, в которых выбранные k чисел имеют справа от себя число, большее на единицу — $(7-k)!$. Тогда, по формуле включений-исключений, искомое число перестановок —

$$7! - \binom{6}{1} \cdot (7-1)! + \binom{6}{2} \cdot (7-2)! + \ldots + \binom{6}{6}(7-6)! = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (7-k)! \qquad \text{(семь слагаемых)}$$

Критерии.

+4 Верно вычислено одно слагаемое (без знака).

+2 Верно применена формула включений-исключений.