

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА
«Алгебра логики, комбинаторика, теория графов» (ФПМИ)
и «Дискретный анализ» (ФРКТ)
2022-2023 учебный год

Организация экзамена

Экзамен состоит из письменной и устной части. Письменная часть состоит из 10 тестовых вопросов и длится 60 минут. В случае, если студент ответил верно не более, чем на 5 вопросов, за экзамен выставляется неудовлетворительная оценка: 0-2 правильных ответа **неудовлетворительно(1)**, 3-5 правильных ответов **неудовлетворительно(2)**.

Содержание устной части экзамена зависит от результатов теста. Если студент ответил верно на 6-7 вопросов теста, то устная часть состоит из беседы с экзаменатором по результатам теста (которая может включать и дополнительные вопросы); максимальная оценка по результатам беседы — **удовлетворительно(4)** (неудовлетворительная оценка также возможна, но не может быть ниже **неудовлетворительно(2)**).

Если студент ответил верно на 8 вопросов и более, то устная часть состоит из ответа на вопросы билета и доп. вопросы. Билет состоит из задачи на определение и вопроса на доказательство. Решение задачи нужно начать с формулировки определения. Оценка за экзамен (если за тест набрано не меньше 8 и беседа не выявила непонимания написанного в тесте) не может быть ниже **удовлетворительно(3)**; в случае, если студент верно решил задачу и привёл верное доказательство, оценка не может быть ниже **хорошо(6)**; если, при этом, тест выполнен на полный балл, то оценка не может быть ниже **хорошо(7)**. Для получения отличной оценки после верного ответа на оба вопроса билета студенту нужно ответить на доп. вопрос, состоящий из решения задачи по курсу (в случае получения оценок **отлично(9)** и **отлично(10)** задач может быть несколько). Экзаменатор может поставить отличную оценку без дополнительных задач, если в ходе беседы по билету уже задал достаточно дополнительных вопросов.

Итоговая оценка за курс для студентов ФРКТ совпадает с оценкой за экзамен (если ранее не была получена оценка автоматом).

Для студентов ФПМИ итоговая оценка выставляется согласно БРС. В случае, если по формулам БРС выходит неудовлетворительная оценка, но оценка за экзамен удовлетворительная (или выше), экзаменатор имеет право выставить итоговую оценку **удовлетворительно(3)** (возможно, задав для этого доп. вопросы). В случае получения неудовлетворительной оценки за экзамен итоговая оценка также является неудовлетворительной, что влечёт пересдачу. Приступив к тесту, студент отказывается от получения оценки автоматом в качестве итоговой оценки за курс.

На экзамене студентам запрещается пользоваться какими-либо материалами и приборами, чем-либо кроме чистой бумаги и письменных принадлежностей. В случае обнаружения факта списывания, за экзамен выставляется оценка **0** (вне зависимости от результатов теста и беседы по устной части).

Пример тестовых вопросов

На экзамене будет тест, вопросы которого будут близки по духу к приведённым ниже. Сами вопросы могут отличаться (не только заменой чисел)!

Ответьте на вопросы. Обоснование не требуется. Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии этого не требуется.

1. Найдите симметрическую разность множеств $\{0, 1, 2, 3\}$ и $\{1, 3, 5, 7\}$.
2. Чему равно пятое число Фибоначчи (F_5)?
3. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число всевозможных функций f . Ответом должно быть число в десятичной записи.
4. Сколько существует подмножеств из 5-элементов у 10-элементного множества? Ответом должно быть число в десятичной записи.
5. Сколько не обязательно осмысленных слов можно получить переставляя буквы в слове «ГОЛОСЛОВНЫЙ»?
6. Найдите число инъекций из множества $\{1, 2, \dots, 7\}$ в $\{1, 2, \dots, 10\}$.
7. Найдите число различных правильных раскрасок графа-пути длины 5 в три цвета.
8. Найдите коэффициент при члене $x^2y^3z^4$ в разложении $(3x - 2y + z)^9$.
9. Представьте булеву функцию f , заданную вектором значений 00101001, в виде ДНФ.
10. Найдите вероятность события «при бросании двух костей выпало 9 очков».
11. Сколько подграфов-треугольников у графа K_5 ?

Список определений

1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание
2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее или) и эквивалентность
3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений
4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции
5. Множество, подмножество, равенство множеств
6. Операции с множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна
7. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)
8. Закон контрапозиции
9. Метод математической индукции
10. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
11. Базовые графы: граф-путь, граф-цикл, полный граф, граф-звезда
12. Подграфы. Путь, цикл, клика и независимое множество
13. Компонента связности. Индуцированный подграф
14. Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 7)
15. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости
16. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы
17. Эйлеровы замкнутые маршруты
18. Функции. Область определения и множество значений
19. Образ множества и полный прообраз

20. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции
21. Правило суммы
22. Правило произведения
23. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера k у n -элементного множества
24. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества
25. Формула включений и исключений
26. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона
27. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение
28. Формула для n -го числа Каталана: $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
29. Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность
30. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения
31. Композиция бинарных отношений
32. Отношения эквивалентности
33. Ориентированные графы, основные определения
34. Компоненты сильной связности ориентированного графа
35. Отношения (частичного) порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки
36. Отношение непосредственного следования
37. Минимальные и максимальные, наименьшие и наибольшие элементы в частично-упорядоченных множествах
38. Изоморфизм графов и (частичных) порядков

39. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы
40. Булевы схемы
41. Многочлены Жегалкина
42. Монотонные булевы функции
43. Линейные булевы функции
44. Самодвойственные булевы функции
45. Булевы функции, сохраняющие ноль и единицу
46. Производящая функция последовательности
47. Числа Фибоначчи и числа Каталана
48. Числа Стирлинга первого и второго рода. Числа Белла

Примеры задач на определения

1. Монотонная булева функция. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число монотонных функций f .
2. Транзитивность. Являются ли отношения $P = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 0)\}$ и $Q = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$ на множестве $\{0, 1, \dots, 7\}$ транзитивными?
3. Формула включений-исключений. Найдите число биекций $f : \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, таких что $f(0) > 1$, а $f(9) < 8$.
4. Самодвойственная булева функция. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?1??0?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число самодвойственных функций f .
5. Линейная булева функция. Найдите число линейных булевых функций от пяти переменных.
6. Полный прообраз. Функция f из множества $\{1, 2, \dots, 8\}$ в множество $\{a, b, c, d, e\}$ определена следующим образом

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите полный прообраз множества $\{a, b, c\}$

7. Независимое множество. Докажите, что булев куб размерности n содержит независимое множество размера 2^{n-1} .

8. Производящая функция. Выразите аналитически производящую функцию последовательности $1, 2, 3, 4, \dots$

Список вопросов на доказательство

1. Обобщённый закон Моргана
2. Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Существуют такие иррациональные числа a и b , что число a^b рационально.
3. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе
4. Если G — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то G не содержит циклов
5. Если G — связный ациклический граф, то между любыми двумя вершинами G существует единственный путь
6. Если между любыми двумя вершинами G существует единственный путь, то G — связный граф с $|V| - 1$ ребром
7. Критерий 2-раскрашиваемости неориентированного графа
8. Критерий существования замкнутого эйлерова маршрута в неориентированном графе
9. Явная формула для числа сочетаний $\binom{n}{k}$: числа k -элементных подмножеств n -элементного множества
10. Бином Ньютона. Рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов
11. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки
12. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

13. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах (Задача Муавра)
14. Формула включений и исключений
15. Число отображений, функций, инъекций, биекций из m -элементного множества в n -элементное множество
16. Формула для числа сюръекций
17. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве A — в точности разбиения множества A на подмножества)
18. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1
19. Разложение в ДНФ и КНФ булевой функции
20. Нижняя оценка на число монотонных булевых функций: монотонных булевых функций от $2n$ переменных не меньше $2^{\frac{2^n}{2n+1}}$
21. Полнота многочленов Жегалкина. Каждой булевой функции от n переменных соответствует единственный многочлен Жегалкина от n переменных (в стандартном виде)
22. Производящая функция для чисел Фибоначчи (аналитическая формула). Явная формула для чисел Фибоначчи (Формула Бине)
23. Число разбиений числа n на различные слагаемые совпадает с числом разбиений числа n на нечётные слагаемые
24.
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \times \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$
25.
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$
26.
$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} [x]_k$$