

Оценка сумм. Рекурсия и итерация

1. Докажите, что $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.
2. Докажите, что асимптотика $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > -1$.

3. Дана программы


```

for (bound = 1; bound < n; bound *= 2 ) {
  for (i = 0; i < bound; i += 1) {
    for (j = 0; j < n; j += 2)
      печать ("алгоритм")
    for (j = 1; j < n; j *= 2)
      печать ("алгоритм")
  }
}
      
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите Θ -асимптотику $g(n)$.

4. Найдите с помощью расширенного алгоритма Евклида обратный остаток $7^{-1} \pmod{102}$.
5. Вычислите $3^{11} \pmod{107}$.
- 6 [Шень 1.1.33]. Функция f с натуральными аргументами и значениями определена так: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n + 1) = f(n) + f(n + 1)$.
 1. Построить рекурсивный и итеративный алгоритмы, вычисляющий $f(n)$ и оценить их сложности, считая что арифметические операции стоят $O(1)$.
 2. Постройте алгоритм, требующий $O(\log n)$ операций.
7. Доказать корректность рекурсивный алгоритма умножения чисел Multiply ([ДПВ] раздел 1.1.2) и получить верхнюю оценку на его время работы.

```
1 Function Multiply ( $x, y$ ) :  
   Вход :  $(x, y)$  — целые числа,  $y \geq 0$   
   Выход:  $x \times y$   
2 if  $y == 0$  then  
3   | return 0  
4 end  
5  $z = \text{Multiply}(x, \lfloor y/2 \rfloor)$   
6 if  $z$  чётно then  
7   | return  $2z$   
8 end  
9 else  
10  | return  $2z + 1$   
11 end  
12 end
```