

## Оценка сумм. Рекурсия и итерация

1. Докажите, что  $\log(n!) = \Theta(n \log n)$ .
2. Докажите, что асимптотика  $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$ , если  $\alpha > -1$ .

3. Дана программы
 

```

for (bound = 1; bound < n; bound *= 2 ) {
  for (i = 0; i < bound; i += 1) {
    for (j = 0; j < n; j += 2)
      печать ("алгоритм")
    for (j = 1; j < n; j *= 2)
      печать ("алгоритм")
  }
}
      
```

Пусть  $g(n)$  обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите  $\Theta$ -асимптотику  $g(n)$ .

4. Найдите с помощью расширенного алгоритма Евклида обратный остаток  $7^{-1} \pmod{102}$ .
5. Вычислите  $3^{11} \pmod{107}$ .
- 6 [Шень 1.1.33]. Функция  $f$  с натуральными аргументами и значениями определена так:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2n) = f(n)$ ,  $f(2n + 1) = f(n) + f(n + 1)$ .
  1. Построить рекурсивный и итеративный алгоритмы, вычисляющий  $f(n)$  и оценить их сложности, считая что арифметические операции стоят  $O(1)$ .
  2. Постройте алгоритм, требующий  $O(\log n)$  операций.
7. Доказать корректность рекурсивный алгоритма умножения чисел Multiply ([ДПВ] раздел 1.1.2) и получить верхнюю оценку на его время работы.

```
1 Function Multiply ( $x, y$ ) :  
   Вход :  $(x, y)$  — целые числа,  $y \geq 0$   
   Выход:  $x \times y$   
2 if  $y == 0$  then  
3   | return 0  
4 end  
5  $z = \text{Multiply}(x, \lfloor y/2 \rfloor)$   
6 if  $z$  чётно then  
7   | return  $2z$   
8 end  
9 else  
10  | return  $2z + 1$   
11 end  
12 end
```