

Алгоритмы «разделяй и властвуй»

1. Решите в целых числах уравнение $55x + 37y = 17$.
2. Оцените временную сложность алгоритма `QPower`, вычисляющего b^n . Считайте, что арифметические операции стоят $O(1)$.

```

1 Function QPower(b, n) :
2   if n > 1 then
3     x = QPower (b, [n/2])
4     if n нечётно then
5       | return b × x × x
6     end
7     return x × x
8   end
9   return b
10 end
    
```

```

1 Function F(n) :
2   if n > 1 then
3     | print («алгоритм»)
4     | F ([n/2])
5     | F ([n/2])
6   end
7 end
    
```

3. Вычислите $3^{11} \bmod 107$.
4. Найдите асимптотическую оценку функции $g(n)$, которая возвращает число слов «алгоритм», напечатанных при вызове $F(n)$.

Если в рекуррентном соотношении $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ не указано округление, то можно считать, что n — степень b .

5. Найти асимптотическую оценку функции $T(n)$, воспользовавшись основной теоремой о рекурсии:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + cn$; б) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^2$; в) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^4$.

6. Найти асимптотическую оценку $T(n)$, используя деревья рекурсии:

а) $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lceil \frac{2n}{3} \rceil) + cn$; б) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + cn^2 \log n$.

7. Предположим, удалось установить, что любое число можно возвести в квадрат за $O(n)$, где n — длина числа в десятичной записи. Докажите, что тогда любые два числа можно перемножать за $O(n)$, где n — длина максимального из чисел в двоичной записи?