

Алгоритмы «разделяй и властвуй»

1. Решите в целых числах уравнение $55x + 37y = 17$.

2. Оцените временную сложность алгоритма `QPower`, вычисляющего b^n . Считайте, что арифметические операции стоят $O(1)$.

<pre> 1 Function QPower(<i>b</i>, <i>n</i>) : 2 if <i>n</i> == 1 then 3 return <i>b</i> 4 end 5 <i>x</i> = QPower (<i>b</i>, $\lfloor n/2 \rfloor$) 6 if <i>n</i> нечётно then 7 return <i>b</i> × <i>x</i> × <i>x</i> 8 end 9 return <i>x</i> × <i>x</i> 10 end </pre>	<pre> 1 Function F(<i>n</i>) : 2 if <i>n</i> > 1 then 3 print («алгоритм») 4 F ($\lfloor n/2 \rfloor$) 5 F ($\lfloor n/2 \rfloor$) 6 F ($\lfloor n/2 \rfloor$) 7 end 8 end </pre>
---	--

3. Вычислите $3^{11} \bmod 107$.

4. Найдите асимптотическую оценку функции $g(n)$, которая возвращает число слов «алгоритм», напечатанных при вызове `F(n)`.

Если в рекуррентном соотношении $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ не указано округление, то можно считать, что n — степень b .

5. Найти асимптотическую оценку функции $T(n)$, воспользовавшись основной теоремой о рекурсии:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + cn$; б) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^2$;

в) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^4$.

6. Найти асимптотическую оценку $T(n)$, используя деревья рекурсии:

а) $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lceil \frac{2n}{3} \rceil) + cn$; б) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + cn^2 \log n$.

7. Предположим, удалось установить, что любое число можно возвести в квадрат за $O(n)$, где n – длина числа в десятичной записи. Докажите, что тогда любые два числа можно перемножать за $O(n)$, где n – длина максимального из чисел в двоичной записи?