

Алгоритмы «разделяй и властвуй»

1. Решите в целых числах уравнение $55x + 37y = 17$.
2. Оцените временную сложность алгоритма `QPower`, вычисляющего b^n . Считайте, что арифметические операции стоят $O(1)$.

```

1 Function QPower( $b, n$ ) :
2   if  $n > 1$  then
3      $x = \text{QPower}(b, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
4     if  $n$  нечётно then
5       return  $b \times x \times x$ 
6     end
7     return  $x \times x$ 
8   end
9   return  $b$ 
10 end

```

```

1 Function F( $n$ ) :
2   if  $n > 1$  then
3     print(«алгоритм»)
4     F( $\lfloor n/2 \rfloor$ )
5     F( $\lfloor n/2 \rfloor$ )
6   end
7 end

```

3. Вычислите $3^{11} \bmod 107$.
4. Найдите асимптотическую оценку функции $g(n)$, которая возвращает число слов «алгоритм», напечатанных при вызове $F(n)$.

Если в рекуррентном соотношении $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ не указано округление, то можно считать, что n — степень b .

5. Найти асимптотическую оценку функции $T(n)$, воспользовавшись основной теоремой о рекурсии:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + cn$; б) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^2$; в) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^4$.

6. Найти асимптотическую оценку $T(n)$, используя деревья рекурсии:

а) $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lceil \frac{2n}{3} \rceil) + cn$; б) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + cn^2 \log n$.

7. Предположим, удалось установить, что любое число можно возвести в квадрат за $O(n)$, где n — длина числа в десятичной записи. Докажите, что тогда любые два числа можно перемножать за $O(n)$, где n — длина максимального из чисел в двоичной записи?