

1 [Шень 2.1.1.]. Постройте алгоритм, который, получив на вход числа n и k , выводит все последовательности длины k целых чисел от 1 до n .

2. В одном языке программирования операция разрезания строки на две части реализовано через копирование. Разрезать строку $w = uv$ на две части u и v будет стоить длину строки $O(|w|)$, где $|w|$ — длина строки w , вне зависимости от длин строк u и v . Постройте алгоритм, который получив на вход строку $w = u_1u_2 \dots u_k$ и номера позиций $i_1 = |u_1|, i_2 = |u_1| + |u_2|, \dots, i_k = |u_1| + \dots + |u_k|$ строит последовательность разрезов строки w , которая приводит к разрезанию w на подстроки u_1, \dots, u_k и использует для этого минимальное число операций.

Заметьте, что в зависимости от порядка разрезов меняется общее число операций: если строку длины 20 нужно разрезать на строки с номерами позиций 3, 10, то отрезав сначала строку в позиции 3 будет затрачено $20 + 17 = 37$ операций, а отрезав сначала строку в позиции 10, будет потрачено $20 + 10 = 30$ операций.

3. Алиса и Боб играют в следующую игру. Есть n карт, на i -й карте записано число $1 \leq a_i \leq n$ (числа могут повторяться!).

Игроки ходят по очереди, первой ходит Алиса. На каждом ходу игрок выбирает карту и выбрасывает её. Кроме того, он выбрасывает все карты, на которых число меньше, чем на выбранной. Формально, если игрок выбирает карту с номером i , он выбрасывает эту карту, а также каждую карту с номером j , такую что $a_j < a_i$.

Игрок проигрывает, если он не может сделать ход, то есть если не осталось карт.

1. Постройте алгоритм, который определяет победителя, если игроки играют оптимально.

2. Постройте жадный алгоритм, решающий эту задачу.

4 [Шень 1.2.29]. Дан неубывающий массив положительных целых чисел:

$$a[1] \leq a[2] \leq \dots \leq a[n].$$

1. Найдите наименьшее целое положительное число, не представимое в виде суммы нескольких элементов этого массива (каждый элемент массива может быть использован не более одного раза).

2. Решите задачу алгоритмом с асимптотикой $O(n)$.

5 [Шень 8.1.4]. Дан выпуклый n -угольник (заданный координатами своих вершин в порядке обхода). Его разрезают на треугольники диагоналями, для чего необходимо $n - 2$ диагонали (это можно доказать индукцией по n). Стоимостью разрезания назовём сумму длин всех использованных диагоналей. Постройте полиномиальный алгоритм, который находит минимальную стоимость разрезания. (Перебор не подходит, так как число вариантов не ограничено многочленом.)