Упражнение 1. Найдите число нестрого монотонно возрастающих (всюду определённых) функций из множества $\{1, \ldots, n\}$ в множество $\{1, \ldots, m\}$.
Это необязательное упражнение на вспоминание курса АЛКТГ.

1. Дано n слов длины k, состоящих из маленьких букв латинского алфавита. Предложите эффективный алгоритм их сортировки в лексикографическом (словарном) порядке.

2. Пусть числовой массив $a[1], \ldots, a[n]$ строго унимодален на максимум. Это означает, что существует t, такое что

$$a[1] < a[2] < \cdots < a[t] > a[t+1] > \cdots > a[n-1] > a[n], \quad 1 \leqslant t \leqslant n.$$

1. Разрешается за один ход спросить значение одного элемента массива. Докажите, что можно найти значение максимального элемента $a[t]$ за не более $O(\log n)$ ходов.

2*. Докажите, что можно найти значение максимального элемента за не более чем $\log_a n + c$ ходов, где $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3*. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго выпуклая функция ($\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a \in (0,1)$ выполнено $(1-a) \cdot f(x) + a \cdot f(y) > f((1-a) \cdot x + a \cdot y)$), то она строго унимодальна на минимум (определение для непрерывного случая аналогично дискретному). Также докажите, что если f – дважды дифференцируемая, то из $f''(x) > 0$ следует, что она строго выпуклая.

4*. Дано k точек на плоскости, вещественные координаты которых по модулю не превосходят N. Нужно найти точку x_0 на оси Ox, суммарное расстояние от которой до всех точек минимально. Вам требуется найти эту точку с точностью до ε (т. е. ваш ответ x не должен отличаться от x_0 более, чем на ε по модулю). Предложите алгоритм, который решает эту задачу за $O(k \cdot \log \frac{N}{\varepsilon})$ арифметических операций и операций извлечения корня.

3. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\log_3 n + c$ взвешиваний.

4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\log_3 n + c$ взвешиваний.

5. Даны два отсортированных массива длины n. Предложите как можно более эффективный алгоритм поиска медианы в массиве, состоящем из всех данных $2n$ элементов. Можно считать, что все элементы различные. Докажите корректность алгоритма и оцените его сложность (количество сравнений). В этой задаче обращения к элементам массива выполняются за O(1), читать оба массива целиком не требуется, считайте, что они уже лежат в памяти.

6. Определите, что число является значением данного многочлена с натуральными коэффициентами в натуральной точке. На вход задачи подаются натуральные числа $n, a_0, \ldots a_n$ и y. Необходимо определить, существует ли натуральное число x, такое что

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

7. Есть n монет разного веса. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты.

1. Найдите самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n + O(1)$ взвешиваний.

2*. Докажите, что нельзя найти среди n монет самую тяжелую и самую лёгкую монету за менее чем $\frac{3}{2}n + c$ взвешиваний.