

1. В графе может быть несколько кратчайших путей между какими-то вершинами. Постройте линейный по времени алгоритм, находящий количество вершин, которые лежат хотя бы на одном кратчайшем пути из s в t в неориентированном графе с единичными весами на рёбрах.

Упражнение 1. Приведите пример взвешенного ориентированного графа, на котором алгоритм Дейкстры **а)** находит кратчайшие пути неправильно; **б)** находит кратчайшие пути правильно. Продемонстрируйте работу алгоритма на первом примере.

Упражнения не входят в обязательную часть домашнего задания.

2. Рассмотрим следующую модификацию алгоритма Дейкстры. При инициализации, в очереди с приоритетами находится лишь вершина s . Вершина v добавляется в очередь с приоритетами, если в результате релаксации $\text{Relax}(u, v)$ расстояние до вершины v изменилось, и при этом v не была в этот момент в очереди. Остальные шаги алгоритма остались без изменений.

1. Докажите корректность модифицированного алгоритма.

2. Докажите, что модифицированный алгоритм работает корректно даже в случае наличия рёбер отрицательного веса, но при отсутствии цикла отрицательного веса. Оцените время работы алгоритма на графах такого вида и сравните его со временем работы алгоритма Беллмана-Форда.

3. Модифицируйте алгоритм так, чтобы он выдавал ошибку на графах с циклами отрицательного веса.

3. Профессор О. П. Рометчивый предлагает следующий способ нахождения кратчайшего пути из s в t в данном ориентированном графе, содержащем рёбра отрицательного веса. Прибавим достаточно большую константу к весам всех рёбер и сделаем все веса положительными, после чего воспользуемся алгоритмом Дейкстры.

Корректен ли такой подход? Если да, то докажите это, если нет — укажите контр-пример.

4. Предложите $O(|V| + |E|)$ алгоритм поиска кратчайших расстояний от данной вершины s до всех остальных в графе, в котором все веса ребер равны 0 или 1. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

5. В орграфе есть ребра отрицательного веса, но нет циклов с отрицательным весом. Предложите алгоритм, который находит для данной вершины вершину, **от которой** она удалена на максимальное расстояние. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

6. Независимое множество в неориентированном графе — это множество вершин попарно не соединённых ребрами. Предложите $O(|V| + |E|)$ алгоритм поиска максимального по размеру независимого множества в дереве.

7*. Дан орграф, ребра могут быть отрицательного веса, модуль весов ребер не превосходит W . Предложите $O(|V||E|(\log W + \log |V|))$ алгоритм нахождения простого цикла с минимальным средним весом. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

8*. Дан ориентированный граф $G(V, E)$. Нужно добавить к нему наименьшее количество ребер так, чтобы все вершины стали достижимы друг из друга (сделать весь граф односвязной компонентой). Предложите эффективный алгоритм, который решает эту задачу, докажите его корректность и оцените асимптотику.