

Алгоритмы «разделяй и властвуй»

```

1 Function QPower( $b, n$ ) :
2   if  $n > 1$  then
3      $x = \text{QPower}(b, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
4     if  $n$  нечётно then
5       return  $b \times x \times x$ 
6     end
7     return  $x \times x$ 
8   end
9   return  $b$ 
10 end

```

```

1 Function F( $n$ ) :
2   if  $n > 1$  then
3     print(«алгоритм»)
4     F( $\lfloor n/2 \rfloor$ )
5     F( $\lfloor n/2 \rfloor$ )
6   end
7 end

```

1. 1. Оцените временную сложность алгоритма QPower, вычисляющего b^n . Считайте, что арифметические операции стоят $O(1)$.
2. Постройте итеративный алгоритм, вычисляющий QPower.
2. Найдите асимптотическую оценку функции $g(n)$, которая возвращает число слов «алгоритм», напечатанных при вызове F(n).

Если не оговорено противного, то в рамках курса считается, что при малых n $T(n)$ — константа.

3. Найти асимптотическую оценку функции $T(n)$, воспользовавшись основной теоремой о рекурсии:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + cn$; б) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^2$; в) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + cn^4$.

4. Найти асимптотическую оценку $T(n)$, используя деревья рекурсии:

а) $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lceil \frac{2n}{3} \rceil) + cn$; б) $T(n) = 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + cn^2 \log n$.

5. На вход задачи подаётся число n и массив чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Постройте линейный алгоритм, находящий число s , при котором достигается минимум суммы

$$\sum_{i=1}^{2n+1} |x_i - s|.$$

6. Предположим, удалось установить, что любое число можно возвести в квадрат за $O(n)$, где n — длина числа в двоичной записи. Докажите, что тогда любые два числа можно перемножать за $O(n)$, где n — длина максимального из чисел в двоичной записи.