

1. Дан массив длины n , состоящий только из нулей и единиц. Предложите линейный алгоритм сортировки данного массива.

2. На прямой задано n отрезков, причем известно, что они образуют систему строго вложенных отрезков (их можно упорядочить так, чтобы каждый строго содержался в следующем). Отрезки заданы координатами концов $[l_i, r_i]$ (и могут быть даны в неупорядоченном виде). Предложите асимптотически эффективный алгоритм (с точки зрения количества арифметических операций), который находит все точки прямой, которые покрыты ровно $2n/3$ отрезками.

3. Рассмотрим детерминированный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время из параграфа 9.3 Кормена. Какая асимптотика будет у алгоритма, если делить элементы массива на группы по семь, а не по пять?

4. Предложите полиномиальный от длины входа алгоритм решения сравнения $a \cdot x + b \equiv 0 \pmod{M}$ (На вход дают целые числа a, b, M в двоичной системе исчисления).

5. 1. Оцените глубину стека (рекурсивных вызовов) при работе быстрой сортировки в худшем случае.

2. Измените алгоритм быстрой сортировки так, чтобы глубина стека в худшем случае была $\Theta(\log n)$.

6. Дан массив из n чисел. Нужно разбить этот массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным. Предложите $O(n \log n)$ алгоритм для решения этой задачи.

7* Запишите рекуррентное соотношение для сложности и докажите по индукции, что трудоемкость алгоритма Randomized-Qsort (в среднем) равна $O(n \log n)$.

функция $RandomQsort(A[1..n])$

```

if  $n > 1$ 
     $x = A[RandomInteger(1, n)]$ 
    ( $x$  - случайный элемент из  $A$ )
     $Partition(A, x) \rightarrow B[1..k-1] \ x \ C[1..n-k]$ 
    (разбили  $A$  на массивы меньше  $x$ , и больше  $x$ )
     $RandomQsort(B[1..k-1])$ 
     $RandomQsort(C[1..n-k])$ 
    return  $B[1..k-1] \ x \ C[1..n-k]$ 
endif
```

8* Запишите рекуррентное соотношение для сложности и докажите по индукции, что трудоемкость (в среднем) алгоритма Randomized-Selection поиска k -й порядковой статистики равна $O(n)$.

функция $RandomSelection(A[1..n], k)$

```

if  $n == 1$ 
    return  $A[1]$ 
```

```
else
   $x = A[\text{RandomInteger}(1, n)]$ 
  ( $x$  - случайный элемент из  $A$ )
   $\text{Partition}(A, x) \rightarrow B[1..l-1] \ x \ C[1..n-l]$ 
  (разбили  $A$  на массивы меньше  $x$ , и больше  $x$ )
  if  $l == k$ 
    return  $x$ 
  if  $k < l$ 
    return  $\text{RandomSelection}(B[1..l-1], k)$ 
  if  $k > l$ 
    return  $\text{RandomSelection}(C[1..n-l], k-l)$ 
```