

Динамическое программирование II

1. Постройте алгоритм, который, получив на вход число n (k и n), выводит
 - а) все подмножества множества $\{1, \dots, n\}$;
 - б) все перестановки чисел $1, \dots, n$;
 - в) все подмножества множества размера k множества $\{1, \dots, n\}$.
2. Фирма производит программное обеспечение для банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую клиентом сумму минимальным количеством купюр.
 1. Если у банкомата есть купюры номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор банкнот будет $50+20+1$. Постройте жадный алгоритм, который будет решать задачу для данного набора купюр и произвольной суммы, которая является входом задачи.
 2. Постройте алгоритм, который решает задачу, в случае когда на вход помимо суммы подаются и номиналы банкнот. Является ли он полиномиальным от длины входа?
3. Постройте алгоритм, перечисляющий все последовательности из n нулей, единиц и двоек, в которых никакая группа цифр не повторяется два раза подряд (нет куса вида XX).
4. Постройте алгоритм со временем работы $O(nt)$ для следующей задачи. На вход задачи подаются положительные целые числа n, a_1, \dots, a_n и t . Необходимо проверить, представимо ли число t в виде суммы из некоторых членов последовательности a_1, \dots, a_n ? Каждое a_i разрешено использовать не более одного раза (можно не использовать вообще).

Указания и решения задач 1 и 4 приведены в главах 2 и 3 книги А. Шеня «Программирование: теоремы и задачи». Задача 3 взята из главы 3, но её решение в книге не приведено.
5. Есть прямоугольный кусок ткани $X \times Y$, где X и Y — положительные целые числа. Из этой ткани можно делать n видов изделий; каждое изделие вида i использует прямоугольник $a_i \times b_i$ и приносит доход c_i (все a_i, b_i, c_i — тоже положительные целые числа). Станок для резки ткани умеет резать прямоугольные куски только вдоль их стороны (любой). Какой максимальный доход можно извлечь из куска $X \times Y$? Ваш алгоритм должен построить оптимальную последовательность разрезов.
6. На столе лежат в ряд n банковских карт, на счету которых находится v_1, v_2, \dots, v_n долларов. Два игрока по очереди берут карты, причём можно брать только крайнюю карту (с любой стороны), до тех пор, пока не кончатся все карты. Каждый из игроков, заинтересован в максимальной суммарной стоимости взятых им карт. Считайте, что n чётно.
 1. Покажите, что жадная стратегия (брать ту из карт, которая дороже) не оптимальна: уже первый ход по этому правилу может помешать достичь оптимума.
 2. Постройте алгоритм отыскания оптимальной стратегии для первого игрока за время $O(n^2)$. Получив на вход v_1, \dots, v_n , алгоритм должен произвести препроцессинговые вычисления за $O(n^2)$, а вычисление каждого следующего хода должно выполняться за $O(1)$ шагов (с использованием сохранённой информации).
 3. Представьте теперь, что задача игрока не максимизировать стоимость карт, а просто набрать стоимость больше, чем у соперника. Постройте жадное решение для этой задачи.