1. Докажите, что самую тяжёлую и самую лёгкую монету можно найти, совершив не более $\frac{3n}{2} - 2$ взвешивания, при чётном n.
Решение. Разобьём монеты на пары произвольным образом и взвесим каждую пару. Победителей взвешиваний отправим в одну кучку, а проигравших в другую. В первой кучке тем самым будут находиться кандидаты на максимум, а во второй — кандидаты на минимум. Найдём максимум в первой кучке и минимум во второй, затратив на это $n/2 - 1$ взвешивание в каждом случае.

2. Докажите, что самую тяжёлую и самую лёгкую монету нельзя найти, совершив менее $\frac{3n}{2} - 1$ взвешивания, при чётном n.
Решение. Мы приведём два решения этой задачи. Начнём с решения методом противника. Для описания стратегии противника, разобьём все монеты на множества:

U (unknown) из всех не взвешенных ни разу монет;

$C_{\max}$ из монет, которые уже выигрывали, но ни разу не проигрывали;

$C_{\min}$ из монет, которые уже проигрывали, но ни разу не выигрывали;

NC (non-candidates) из как проигрывавших, так и выигрывавших монет.

Множества будут обновляться после каждого взвешивания. В самом начале все монеты принадлежат множеству U, а в результате решения задачи множества $C_{\min}$ и $C_{\max}$ будут содержать ровно по одной монете, а все остальные монеты будут в множестве NC.

Опишем стратегию противника. Пусть взвешиваются монеты i и j. Монета i побеждает во взвешивании, если $i \in C_{\max}$ и $j \notin C_{\max}$ или $j \in C_{\min}$ и $i \notin C_{\min}$ (заметьте, что эти условия совместны). В остальных случаях ответ произвольный, но согласован с результатами предыдущих взвешиваний.

Другими словами, стратегия гарантирует, что кандидаты на максимум и минимум остаются таковыми, если это возможно.

Докажем нижнюю оценку. Каждая монета из множества U после первого своего взвешивания попадает в одно из множеств $C_{\max}$ или $C_{\min}$. Обозначим через $t_{\max}$ и $t_{\min}$ — суммарное количество монет, побывавших в соответствующих множествах. Из сказанного следует, что $t_{\max} + t_{\min} = n$. Чтобы найти максимум и минимум, необходимо оставить в каждом множестве по одной монете, совершив для этого $(t_{\max} - 1) + (t_{\min} - 1) =$

$n-2$ взвешивания: согласно стратегии противника, монета выбывает из множества кандидатов, только при взвешивании с монетой из того же множества. Ясно, что множество U нельзя опустошить, совершив менее $n/2$ сравнений: если взвешивается хотя бы одна монета не из U, то из U выбывает не более одной монеты; при этом, согласно стратегии, множества $C_{\max}$ и $C_{\min}$ не уменьшаются.

Первое решение, хотя и честное, может показаться читателю недостаточно формальным. Для формализации подобных наблюдений используют метод потенциалов, который мы и используем во втором решении. Этот метод состоит в следующем. Каждой конфигурации, в нашем случае набору (u, $c_{\max}$, $c_{\min}$, nc), компоненты которого обозначают количество монет в соответствующих множествах, ставят в соответствие величину, которую называют *потенциалом* и следят за её изменением. В нашем случае потенциалом будет число

$$p = \frac{3}{2}u + c_{\max} + c_{\min}.$$

В процессе решения задачи конфигурация $(n, 0, 0, 0)$ с потенциалом $\frac{3n}{2}$ переходит в конфигурацию $(0, 1, 1, n-2)$ с потенциалом 2. Отслеживание изменения потенциала при каждом взвешивании позволяет доказать нижнюю оценку.

Исследуем как меняется потенциал, если противник придерживается объявленной выше стратегии. При взвешивании двух монет из $C_{\max}$ или двух монет из $C_{\min}$, потенциал уменьшается на единицу. Если взвешиваются обе монеты из U, то и $c_{\max}$ и $c_{\min}$ увеличиваются на 1, а u уменьшается на 2 — потенциал уменьшается на 1. Если монета из U взвешивается с монетой не из U, то u уменьшается на 1, а $c_{\max}$ или $c_{\min}$ увеличивается на 1 — отсюда потенциал уменьшается на 1/2. Остались только случаи взвешиваний монеты из $C_{\max}$ с монетой из $C_{\min}$, монеты из $C_{\max}$ или $C_{\min}$ с монетой из NC, а также случай взвешивания двух монет из NC. Но эти взвешивания не меняют потенциал.

Итак, введя потенциал, мы установили, что за каждое взвешивание, потенциал уменьшается не более, чем на 1, поэтому, чтобы уменьшить $\frac{3n}{2}$ до 2 необходимо совершить не менее $\frac{3n}{2} - 2$ взвешиваний.

Своё название метод получил от потенциальной энергии в физике: как бы ни спускали тело массой m с высоты h до высоты 0, в процессе спуска произойдёт изменение потенциальной энергии с mgh до нуля.

Мы перешли в этом решении от стратегии противника к методу потенциалов. При решении задач, построить сходу стратегию противника бывает непросто. Это помогает сделать удачное введение потенциала — стратегия выбирается исходя из оптимизации изменений потенциала.

3. Докажите, что самую тяжелую и вторую по тяжести монету из n монет можно найти, совершив не более чем $n + \log n + c$ взвешиваний.

Решение.Нам хорошо известно, что чтобы найти максимум на n монетах необходимо совершить $n - 1$ сравнение. Обычно для этих целей сравнивают первую монету со второй, затем выигравшую в первом сравнении сравнивают с третьей и так далее. Но для решения этой задачи, мы поступим по-другому.

Будем считать, что у нас n монет с весами $a_1, \dots, a_n$ и $n = 2^k$. Мы устроим турнир между монетами по олимпийской системе (проигравший выбывает навсегда). Сначала разобьём монеты на пары a_1 с a_2, a_3 с a_4, …, a_{n-1} с a_n и взвесим каждую из пар. В результате взвешиваний у нас определятся победители первого тура:

$$w_1 = \max(a_1, a_2),\ w_2 = \max(a_3, a_4),\ \dots\ , w_{\frac{n}{2}} = \max(a_{n-1}, a_n).$$

Дальше будем взвешивать w_1 с w_2, … , $w_{\frac{n}{2}-1}$ с $w_{\frac{n}{2}}$ потом победителей второго тура между собой и так далее пока не останется только олимпийский чемпион, который и будет первым максимумом. Описанный процесс взвешиваний для восьми монет приведён на рис. 1.

Итак, мы нашли первый максимум, совершив $n - 1$ сравнение (проверьте это!). Организация турнира позволит найти второй максимум, совершив ещё $k - 1$ сравнение. Отметим сначала, что высота получившегося дерева равна k: читатель уже должен был узнать полное бинарное дерево с 2^k листьями. В результате турнира, максимум проделал путь по дереву из листа в корень: если максимумом в нашем примере была шестая монета, то она проделала путь $a_6 \to w_3 \to w_6 \to \max_1$. На этом пути должно было произойти сравнение со вторым максимумом: если первый и второй максимум никогда не сравнивались, то увеличив вес второго, его можно сделать первым, не изменив тем самым результата ни одного сравнения. Длина пути максимума в корень совпадает с высотой дерева и количеством соперников на этом пути. Значит, второй максимум — это максимум среди k соперников первого и его можно отыскать за $k - 1$ сравнение.

Итак, мы доказали, что в случае $n = 2^k$ монет, максимум и второй максимум можно найти, совершив $n + \log_2 n - 2$ сравнения. В случае,

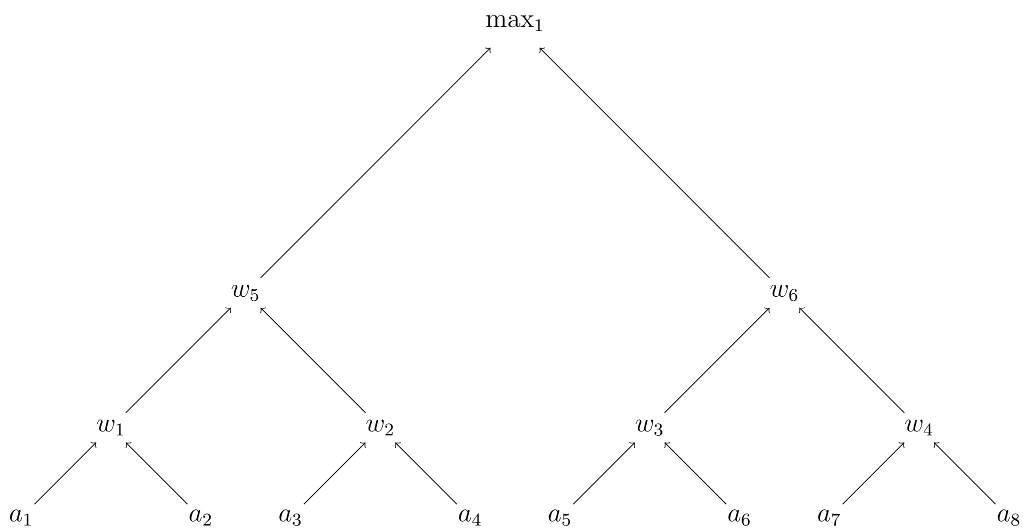

Рис. 1: турнир на 8 монетах.

если n не степень двойки, можно также организовать турнир. В этом случае, высота дерева будет равна $\lceil \log_2 n \rceil \leqslant \log_2 n + 1$, но дерево уже не будет полным бинарным: какие-то монеты сразу выйдут во второй тур, поскольку у них не будет соперника.

4. Докажите, что нельзя найти самую тяжелую и вторую по тяжести монету из n монет за менее чем $n + \log n + c$ взвешиваний.

Решение. Построим стратегию противника. Для этого будем хранить списки (множества) монет:

MC (max-candidates) монеты, которые ни разу не проигрывали;

X_i монеты, проигравшие только i-ой монете — список кандидатов на второй максимум при $i \in MC$

NC (non-candidates) монеты, которые легче хотя бы ещё двух.

Как и ранее, обозначим строчными буквами количество элементов в данных множествах.

Опишем стратегию противника. Пусть взвешиваются монеты i и j. Монета i побеждает во взвешивании, если

- $i \in MC$ и $j \notin MC$;

- $i \in X_a$ ($a \in MC$) и $j \in NC$;

  (на множествах задан приоритет $MC > X_i > NC$.)

- $i, j \in MC$ и $x_i \geqslant x_j$ (побеждает тот, кто уже выигрывал больше);

  В остальных случаях ответ произвольный, но согласован с результатами предыдущих взвешиваний.

Обозначим для удобства $X = \bigcup\limits_{i \in MC} X_i$ и соответсвенно $x = \sum\limits_{i \in MC} x_i$.

Для доказательства нижней оценки будем отслеживать изменение вектора количества монет в указанных множествах

$$(mc,\ x,\ nc)$$

после каждого взвешенивания: обозначим через a^t — компоненту вектора, определённого после t-го взвешивания ($a \in \{mc, x, nc\}$). В самом начале вектор имеет вид $(n, 0, 0)$ после решения задачи $(1, 1, n-2)$. Действительно, если бы в MC было бы больше одного элемента, то максимум был бы не определён, а если бы в $X = X_i$ (i — максимум) было больше одной монеты, то был бы не определён второй максимум.

Заметим, что при выбранной стратегии, после каждого взвешивания величина mc уменьшается не более, чем на 1 — отсюда берётся уже известное число взвешиваний $(n-1)$, необходимое для нахождения первого максимума.

Дополнительный логарифм берётся из оценки изменения компоненты x. Приведём сначала неформальное рассуждение, которое объясняет суть дела, после чего приведём формальное доказательство. Величина x уменьшается после каждого взвешивания не более чем в два раза. Максимальное уменьшение возможно, когда сравниваются два кандидата $i, j \in MC$, у которых одинаковое и наибольшее количество проигравших ($x_i = x_j = x/2$). Точнее, после каждого взвешивания компонента x меняется согласно неравенству, из которого и следует заявленная оценка:

$$x^{t+1} \geqslant x^t/2 + 1 \tag{1}$$

и при этом $m^{t+1} = m^t - 1$: один из кандидатов на максимум становится кандидатом на второй максимум — такие взвешивания уже были учтены нами выше. Осталось отметить, что каждая монета из MC, которая не является максимумом, рано или поздно попадает в множество X. Поэтому, после того как в MC осталась одна монета i (максимум), то в списке X_i побывало не меньше $\log_2 n + c'$ монет. Монеты исключаются из множества X_i либо при взвешивании между собой монет из X_i, либо при взвешивании монеты из X_i с монетой из MC. Если выполнялись только последние, то на исключение всех монет из множество X уйдёт $\log n + c' - 1$ взвешиваний, а если были и первые, то потребуется ещё больше взвешиваний.

Формализуем эти наблюдения. Будем следить за парой параметров

$$mc \quad \text{и} \sum_{i \in MC} 2^{x_i}.$$

Эти параметры образуют потенциал (который не обязан быть числом). Перед первым взвешиванием пара имеет значение (n, n), а после последнего — $(1, 2)$. Докажем, что если после взвешивания произошло изменение параметров, то случилось одно из двух: либо первый параметр уменьшился на 1, а второй при этом не уменьшился, либо второй параметр уменьшился не больше, чем вдвое, а первый не изменился. Первый параметр меняется, только если обе взвешиваемые монеты i, j принадлежат множеству MC. При обосновании неравенства (1) было показано, что проигравшая монета j попадает в список победителя i, и, поскольку $x_i > x_j$, получаем $2^{x_i} + 2^{x_j} \leqslant 2^{x_i+1}$ — не смотря на то, что степень двойки 2^{x_j} пропала из суммы, сама сумма не уменьшилась!

Согласно объявленной стратегии, монеты из MC выигрывают у монет из остальных множеств, а потому, при уменьшении второго параметра, которое как мы показали возможно если только взвешивается хотя бы одна монета не из MC, первый параметр измениться не может. Если второй параметр уменьшился, то из множества X исчезла ровно одна монета — больше, согласно стратегии, может исчезнуть, только если во взвешивании участвовала монета из MC. Таким образом, второй параметр уменьшился не более, чем в два раза, поскольку в два раза уменьшилось ровно одно слагаемое: $2^{x_j} \to 2^{x_j - 1}$.

Итак, чтобы уменьшить до единицы первый параметр, необходимо совершить не менее $n-1$ взвешивания, а чтобы уменьшить второй до двойки — не менее, чем $\log_2 n - 1$ взвешиваний. Получаем отсюда заявленную оценку.