

Программа курса «Основные алгоритмы»

ФУПМ. 2019 г.

Содержание

1 Введение. Верхние и нижние оценки сложности алгоритмов	2
2 Жадные алгоритмы	3
3 Рекурсия и итерация.	4
4 Алгоритмы «разделяй и властвуй»	4
5 Сортировки. Верхние и нижние оценки I	5
6 Сортировки. Верхние и нижние оценки II	5
7 Структуры данных	6
8 Деревья поиска. AVL-Деревья и Красно-чёрные деревья	6
9 Алгоритмы на графах I. Поиск в глубину	7

10 Алгоритмы на графах II.	
Кратчайшие пути	7
11 Алгоритмы на графах III.	
Остовные деревья	8
12 От кратчайших путей к динамическому программированию	8
13 Динамическое программирование	9
14 Числовые алгоритмы и Хэш-функции	9
Список литературы	10

1 Введение. Верхние и нижние оценки сложности алгоритмов

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

1. Язык Си как исполнители алгоритмов.
2. Сложность по времени и по памяти. Верхние и нижние оценки.
Примеры:
 - Задача о поиске максимума последовательности: верхняя и нижняя оценки (последняя — через связность графа)
 - Проверка числа n на простоту перебором делителей до \sqrt{n} — экспоненциальный алгоритм (сложность измеряется по длине входа.).
3. O , Ω , Θ обозначения — формальные определения.
 - $f(n) = \Theta(g(n))$ — отношение эквивалентности.
 - Если $P(n)$ — многочлен степени k , то $P(n) = \Theta(n^k)$.
 - Сумма чисел от 1 до n есть $\Theta(n^2)$.
 - $1^k + 2^k + \dots + n^k = \Theta(n^{k+1})$.
 - Оценка суммы через интеграл (без доказательства).

2 Жадные алгоритмы

Литература: [Шен04; КФ12]

1. Пример: задача о поиске треугольника максимальной площади, сторона которого лежит на оси Ox .
2. Жадные алгоритмы и индуктивные функции [Шен04].
 - функции максимума и суммы — индуктивные
 - индуктивное расширение на примере поиска максимума произведения
3. Онлайн-алгоритмы
4. Пример нетривиального жадного алгоритма: **Задача 1.** На вход подаётся последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n , при этом все числа, за исключением одного, входят в последовательность ровно два раза. Необходимо найти число, которое встречается в последовательности один раз.

Решение. Суммируем биты чисел по модулю 2. В результате суммирования получаем уникальное число.
5. Задача о рюкзаке (если позволит время, возможно что-то пойдёт на следующую лекцию).
 - Жадный алгоритм для непрерывной задачи о рюкзаке [КФ12].
 - Жадный алгоритм для 2-приближённого алгоритма для дискретной задачи о рюкзаке [КФ12].
6. Коротко о **P** и **NP**, почему безнадежно искать точное решение некоторых задач.

3 Рекурсия и итерация.

Литература: [ДПВ12; Шен04]

Переход от алгоритмов, заданных рекурсивно, к алгоритмам, заданным итеративно, с использованием стека на примере алгоритма Евклида.

План лекции

- Расширенный алгоритм Евклида
- Алгоритм быстрого возведения в степень
- Числа Фибоначчи. Вычисление через
 - рекурсию
 - рекурсию с запоминанием
 - итерацию
 - возведение матрицы в степень
- Доказательство нижних оценок на время работы алгоритма Евклида через числа Фибоначчи.
- Коды Грея (обход булева куба) [Шен04]

4 Алгоритмы «разделяй и властвуй»

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

Деревья рекурсии. Доказательство Θ -оценок для алгоритмов:

- Алгоритм Карацубы
- Сортировка слиянием
- Поиск k -ой порядковой статистики (детерминированный алгоритм)
- Алгоритм деления целых чисел (Divide, раздел 1.1 [ДПВ12])

Анализ рекуррентных соотношений. Доказательство основной теоремы о рекурсии

5 Сортировки. Верхние и нижние оценки I

Литература: [КЛР05; КЛР02]

Сортировки сравнениями. Модель разрешающих деревьев, доказательство нижних оценок.

План лекции

- Доказательство оценки $\Omega(n \log n)$ для сортировок сравнениями.
- Бинарный поиск. Нижняя оценка на поиск элемента в отсортированном массиве.
- Задача поиска $F^{-1}(x)$ для монотонной функции.
- Потенциальные функции. Нижняя оценка на поиск второго максимума в массиве.
- Оценки сложности различных алгоритмов сортировки:
 - сортировка пузырьком
 - сортировка вставками

6 Сортировки. Верхние и нижние оценки II

Литература: [КЛР05; КЛР02]

План лекции

- Быстрая сортировка (вероятностный алгоритм). Оценка среднего времени работы.
- Быстрая сортировка (детерминированный алгоритм).
- Вероятностный алгоритм поиска k -ой порядковой статистики.

- Сортировка за линейное время.
 - Сортировка подсчётами
 - Поразрядная сортировка (Radix sort)
- Пирамидальная сортировка (Heap sort).

7 Структуры данных

Литература: [КЛР05; КЛР02]

План лекции

- Стеки и очереди.
- Односвязные и двусвязные списки
- Очередь с приоритетами на основе Heap.
- Двоичные деревья поиска.

8 Деревья поиска. AVL-Деревья и Красно-чёрные деревья

Литература: [КЛР05; КЛР02]

План лекции

- Балансировка двоичных деревьев поиска на примере операции добавления вершины.
- Декартовы деревья.

9 Алгоритмы на графах I. Поиск в глубину

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

Поиск в глубину. Связь времени открытия и времени закрытия вершин с правильными скобочными последовательностями. Переход от рекурсивного варианта алгоритма к итеративному с помощью стека.

Алгоритмы на основе поиска в глубину:

- Топологическая сортировка
- Сильно-связные компоненты
- Поиск Эйлера цикла
- Проверка на двудольность
- Поиск мостов

10 Алгоритмы на графах II. Кратчайшие пути

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

План лекции

- Поиск в ширину
- Алгоритм Беллмана-Форда
- Алгоритм Дейкстры

11 Алгоритмы на графах III. Остовные деревья

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

План лекции

- Алгоритм Крускала
- Алгоритм Прима
- Вероятностный алгоритм поиска минимального разреза (Раздел 5.1 [ДПВ12], Алгоритм Каргера)

12 От кратчайших путей к динамическому программированию

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

План лекции

- Сюжет с матрицами *согласовать по времени с М. Н. Вялым и курсом линейной алгебры.*
 - возведения матрицы в степень — связь с количеством путей в графе
 - смена кольца на (\vee, \wedge) — проверка на связность и транзитивное замыкание
 - смена кольца на $(\min, +)$ — поиск кратчайших путей
- Алгоритм Флойда-Уоршелла
- Линейный алгоритм поиска кратчайших расстояний в топологически сортированном графе.

- Линейный алгоритм нахождения центра и диаметра взвешенного дерева.
- Динамическое программирование сверху и снизу: рекурсия и индукция.
- Задача о расстоянии редактирования (Edit distance)

13 Динамическое программирование

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02; КФ12; Шен04]

План лекции

- Поиск выигрышных стратегий в конечной игре
- Алгоритм для дискретной задачи о Рюкзаке
- ε -приближённый алгоритм для дискретной задачи о Рюкзаке [КФ12]
- Генерации комбинаторных последовательностей [Шен04]

14 Числовые алгоритмы и Хэш-функции

Литература: [ДПВ12; КЛР05; КЛР02]

План лекции

- протокол Диффи-Хеллмана
- RSA
- Вероятностные алгоритмы проверки простоты (тест Ферма и тест Миллера-Рабина)
- Хэш-функции

Список литературы

- [ДПВ12] *Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У.* Алгоритмы. — М.: МЦНМО, 2012.
- [КЛР05] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. — 2-е. — М.: Вильямс, 2005.
- [КЛР02] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2002.
- [Шен04] *Шень А. Х.* Программирование: теоремы и задачи. — М.: МЦНМО, 2004.
- [КФ12] *Кузюрин Н. ., Фомин С. .* Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. — 2012.
- [18] Лекции по дискретной математике / М. Вялый [и др.]. — Черновик: <http://rubtsov.su/public/hse/2017/DM-HSE-Draft.pdf>, 2018.
- [ЖФФ12] *Журавлёв Ю. И., Флёров Ю. А., Федько О. С.* Дискретный Анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов. — М.: МФТИ, 2012.
- [ЖФВ07] *Журавлёв Ю. И., Флёров Ю. А., Вялый М. Н.* Дискретный Анализ. Основы высшей алгебры. — М.: МЗ-пресс, 2007.
- [Lei96] *Leighton T.* Notes on Better Master Theorems for Divide-and-Conquer Recurrences // Lecture notes, MIT. — 1996.