

Жадные алгоритмы

Во всех задачах этой недели мы полагаем, что арифметические операции стоят $O(1)$.

1 [Шень 1.3.1 (в,д)]. Постройте линейный по времени онлайн-алгоритм, который вычисляет следующие функции или укажите индуктивные расширения для следующих функций:

а) второй по величине элемент последовательности целых чисел (тот, который будет вторым, если переставить члены в неубывающем порядке);

б) максимальная длина монотонного (неубывающего или невозрастающего) участка из идущих подряд элементов в последовательности целых чисел;

2. На вход подаётся последовательность положительных целых чисел x_1, \dots, x_n . Необходимо найти максимальное произведение двух различных элементов последовательности, кратное 15. Формально, нужно найти $\max_{i \neq j} \{x_i \times x_j \mid x_i \times x_j : 15\}$. Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу и использующий $O(1)$ битов памяти и $O(1)$ регистров (в каждом из которых может храниться число x_i).

3 [Шень 1.3.2]. Даны две последовательности целых чисел $x[1] \dots x[n]$ и $y[1] \dots y[k]$. Выясните, является ли вторая последовательность подпоследовательностью первой, то есть можно ли из первой вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталась вторая. Число действий $O(n + k)$.

4. На вход подаётся число k и последовательность из нулей и единиц, которая заканчивается специальным маркером конца ввода $\$$. Докажите, что любой онлайн-алгоритм, который проверяет, что на k -ом месте от конца последовательности стоит 1 использует $\Omega(k)$ битов памяти.

5. На вход подаётся последовательность целых чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$.

1. Постройте онлайн-алгоритм, который вычисляет сумму $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i \times b_j$.

2. Постройте жадный линейный алгоритм, решающий задачу.

6 [Шень 1.1.28-29]. Дано натуральное n .

1. Подсчитайте количество решений неравенства $x^2 + y^2 < n$ в натуральных (неотрицательных целых) числах, не используя действий с вещественными числами.

2. Та же задача, но количество операций должно быть порядка \sqrt{n} .

7 [Шень 1.2.21]. Даны два массива $x[1] \leq \dots \leq x[k]$ и $y[1] \leq \dots \leq y[n]$. Найдите их «пересечение», то есть массив $z[1] \leq \dots \leq z[m]$, содержащий их общие элементы, причём кратность каждого элемента в массиве z равняется минимуму из его кратностей в массивах x и y . Число действий порядка $k + n$.