

Графы III. Остовные деревья

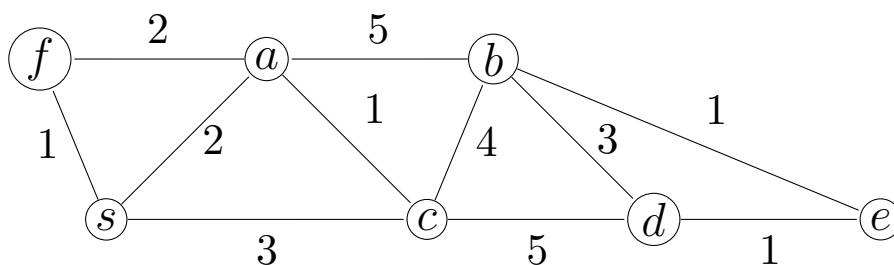


Рис. 4: Граф H .

1. Постройте минимальное остовное дерево графа H
 - а) по алгоритму Крускала;
 - б) по алгоритму Прима, начиная с вершины s .
2. Докажите, что если веса всех рёбер неориентированного графа различны, то минимальное остовное дерево единственно.
3. Постройте алгоритм, который находит *максимальное* остовное дерево графа, то есть остовное дерево максимального веса.
4. Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, веса рёбер которого не обязательно различны. Для каждого из утверждений ниже приведите доказательство, если оно истинно, или постройте контрпример, если оно ложно:
 - а) Если в G больше $|V| - 1$ рёбра и самое тяжёлое ребро уникально, то это ребро не может быть частью минимального остовного дерева.
 - б) Если в G есть цикл с уникальным самым тяжёлым ребром e , то e не может быть частью минимального остовного дерева.
 - в) Дерево кратчайших путей, которое выдаёт алгоритм Дейкстры, является минимальным остовным деревом.
 - г) Алгоритм Прима корректен даже при наличии в графе рёбер отрицательного веса.
 - д) Если уменьшить вес одного ребра, входящего в минимальное остовное дерево T , то T останется минимальным остовным деревом.
5. Улучшите алгоритм Крускала и оцените асимптотику получившегося алгоритма для взвешенных графов, веса которых являются целыми числами
 - а) от 1 до $|V|$;
 - б) от 1 до W для некоторой константы W .