

Динамическое программирование I

1. На вход задачи поступает ориентированный ациклический граф с весами на вершинах; в графе выделена вершина s . Постройте алгоритм, который находит вершину минимального веса, достижимую из s .
2. Назовём последовательность x_1, x_2, \dots, x_n строго унимодальной, если существует такой индекс k , что $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, а $x_k > x_{k+1} > \dots > x_n$, т. е. до индекса k последовательность строго возрастает, после чего строго убывает. Постройте алгоритм, который, получив на вход конечную последовательность натуральных чисел, находит её самую длинную строго унимодальную подпоследовательность.
3. На вход задачи поступают две последовательности символов x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m . Требуется найти кратчайшую последовательность z_1, z_2, \dots, z_k , которая содержит и x и y в качестве подпоследовательности. Пример: для $x = aabac$ и $y = bbaca$ искомой последовательностью будет $z = baabaca$.
4. Рассмотрим следующую игру. На доске нарисовано n палочек. Два игрока по очереди зачёркивают от одной до трёх палочек. Проигрывает тот, кто зачеркнул последнюю палочку.
 1. Кто выигрывает при $n = 20$? (Считая, что соперник не ошибается.)
 2. Кто выигрывает при произвольном n ? Постройте алгоритм, который решает задачу
 - а) динамическим программированием; б) жадным алгоритмом.
5. Два игрока играют в следующую игру. На поле из $(N + 1) \times (N + 1)$ клетки (нумерация клеток от 0 до N) в клетке $(0, 0)$ стоит фишка. Её разрешено двигать из клетки (x, y) в клетку с координатами $(x + a_i, y + b_i)$, где пары неотрицательных целых чисел (a_i, b_i) обговорены перед началом игры; при этом a_i и b_i не равны нулю одновременно. Выигрывает тот игрок, который первым вывел фишку в клетку, которая находится на расстоянии не менее чем R от $(0, 0)$. Необходимо определить кто из игроков выигрывает, при безошибочных действиях соперника. Игроки ходят по очереди, пропускать ход нельзя.
 1. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию при безошибочной игре соперника, если $N = 5$, $R = 5$, а список допустимых ходов: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$.
 2. Постройте алгоритм, который определяет победителя и его выигрышную стратегию в общем случае и оцените его сложность.
6. Постройте алгоритм, который, получив на вход число n (k и n), выводит
 - а) все подмножества множества $\{1, \dots, n\}$;
 - б) все перестановки чисел $1, \dots, n$;
 - в) все подмножества множества размера k множества $\{1, \dots, n\}$.
7. Фирма производит программное обеспечение для банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую клиентом сумму минимальным количеством купюр.
 1. Если у банкомата есть купюры номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор банкнот будет $50+20+1$. Постройте жадный алгоритм, который будет решать задачу для данного набора купюр и произвольной суммы, которая является входом задачи.
 2. Постройте алгоритм, который решает задачу, в случае когда на вход помимо суммы подаются и номиналы банкнот. Является ли он полиномиальным от длины входа?