

## Графы II. Поиск в глубину

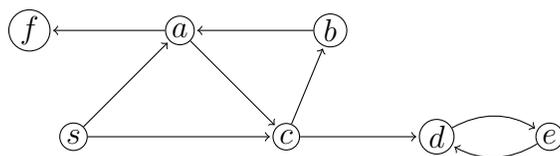


Рис. 3: Граф  $H$ .

1. 1. Опишите компоненты сильной связности графа  $H$ .
2. проведите поиск в глубину начиная с вершины **а**) с вершины  $b$ ; **б**) с вершины  $e$ .
3. Используя время открытия и закрытия, найденные поиском в глубину, найдите алгоритмически компоненты сильной связности. Постройте конденсат  $H'$  графа  $H$ .
4. Проведите топологическую сортировку графа  $H'$ .
2. Докажите, что поиск в глубину работает за время  $O(|V| + |E|)$ .
3. В графе  $G$  был проведён поиск в глубину. Время открытия и закрытия вершин сохранено в массивах  $d$  и  $f$ . Постройте алгоритм, который используя только данные из массивов  $d$  и  $f$  (и описание графа) проверяет, является ли ребро  $e$  графа  $G$  **а**) обратным ребром; **б**) ребром дерева.
4. Модифицируйте поиск в глубину так, чтобы по результату исполнения алгоритма следующие условия можно было проверить за  $O(1)$  (постройте алгоритмы проверки этих условий):
  - а) ребро  $e$  является ребром дерева;
  - б) ребро  $e$  является прямым ребром.
5. Постройте алгоритм, который проверяет, является ли граф двудольным.
6. Постройте алгоритм, который находит в графе Эйлера цикл за  $O(|V| + |E|)$ .
7. Постройте алгоритм, который находит кратчайшие расстояния от вершины  $u$  до всех достижимых из нее вершин взвешенного ориентированного ациклического графа (DAG) и оцените его время работы. На вход задачи подаётся описание DAG  $G$  и список ребер, каждое ребро задано тройкой целых чисел  $(i, j, w)$ , если в  $G$  есть ребро из вершины  $i$  в вершину  $j$  веса  $w$ . Длина пути из вершины  $u$  в вершину  $v$  во взвешенном графе — сумма весов на пути из  $u$  в  $v$ , если этот путь существует.
- Определение.** Ориентированный граф называют *турниром*, если между каждой парой его вершин есть ровно одно ребро. Также такие графы называют *полными* ориентированными графами.
8. Турнир с  $|V|$  вершинами задан в виде матрицы смежности ( $|V|^2$  памяти), предложите алгоритм, который находит общий сток за  $O(|V|)$  (или говорит, что его нет).  
Общим стоком называют вершину, достижимую из любой вершины, такую, что из нее самой ребер не выходит.