

Введение. Жадные алгоритмы

1. Дана программа

```
for (i = 1; i < n; i += 1) {
    for (j = 0; j < i; j += 1) {
        печать ("алгоритм")
    }
}
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите Θ -асимптотику $g(n)$.

2. Известно, что для семейства функций $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ справедливо

$$\exists C \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, \forall n \geq N : f_i(n) \leq Cn.$$

1. Верно ли, что $f_1 + f_2 = O(n)$?

2. Определим $g(n) = f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_n(n)$. Верно ли, что $g(n) = O(n)$? При положительном ответе приведите доказательство, при отрицательном — контрпример и лучшую верхнюю оценку.

3. Приведите верхние и нижние оценки на функции $h_1(n) = n \times f_1(n)$, $h_2(n) = n^2 \times (1 + f_2(n))$ и приведите примеры функций f_1 и f_2 , на которых эти оценки достигаются.

3. На вход подаётся последовательность положительных чисел x_1, \dots, x_n . Необходимо найти максимальное произведение двух различных элементов последовательности, кратное 15. Формально, нужно найти $\max_{i \neq j} \{x_i \times x_j \mid x_i \times x_j : 15\}$. Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу и использующий $O(1)$ битов памяти и $O(1)$ регистров (в каждом из которых может храниться число x_i).

4 [Шень 1.3.1 (в,д)]. Постройте линейный по времени онлайн-алгоритм, который вычисляет следующие функции или укажите индуктивные расширения для следующих функций:

а) второй по величине элемент последовательности целых чисел (тот, который будет вторым, если переставить члены в неубывающем порядке);

б) максимальная длина монотонного (неубывающего или невозрастающего) участка из идущих подряд элементов в последовательности целых чисел;

5. Какой из алгоритмов сортировки является онлайн-алгоритмом?

6 [Шень 1.3.2]. Даны две последовательности целых чисел $x[1] \dots x[n]$ и $y[1] \dots y[k]$. Выясните, является ли вторая последовательность подпоследовательностью первой, то есть можно ли из первой вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталась вторая. Число действий $O(n + k)$.

7 [5.32 ДПВ]. К серверу приходят одновременно n клиентов. Для клиента i известно время его обслуживания t_i . Время ожидания клиента определяется как сумма времени обслуживания всех предыдущих клиентов и времени обслуживания его самого. К примеру, если обслуживает клиентов в порядке номеров, то время ожидания клиента i будет равно $\sum_{j=1}^i t_j$. Постройте эффективный алгоритм, находящий последовательность обслуживания клиентов с минимальным суммарным временем ожидания клиентов.

8. Дан массив длины n , состоящий только из нулей и единиц. Предложите линейный алгоритм сортировки данного массива.

9. На вход подаётся число k и последовательность из нулей и единиц, которая заканчивается специальным маркером конца ввода $\$$. Докажите, что любой онлайн-алгоритм, который проверяет, что на k -ом месте от конца последовательности стоит 1 использует хотя бы k битов памяти.