

Рекурсия и итерация

```

1 Function QPower( $b, n$ ) :
2   if  $n > 1$  then
3      $x = \text{QPower}$ 
4       ( $b, \lfloor n/2 \rfloor$ )
5     if  $n$  нечётно
6       then
7         return
8            $b \times x \times x$ 
9       end
10    return  $x \times x$ 
11  end
12 end

```

```

1 Function F( $x, m$ ) :
2    $a = \text{SX}(m)$ ;
3    $y = 1$ ;
4   for  $i = 1$  to  $a.size$ 
5     do
6       if  $a[i] == X$ 
7         then
8            $y = y \times x$ 
9         else
10         $y = y \times y$ 
11      end
12    end
13  return  $y$ 
14 end

```

```

1 Function G( $n$ ) :
2   if  $n > 1$  then
3     print («алгоритм»)
4     G ( $\lfloor n/2 \rfloor$ )
5     G ( $\lfloor n/2 \rfloor$ )
6   end
7 end

```

- Найдите с помощью расширенного алгоритма Евклида обратный остаток $7^{-1} \pmod{102}$.
1. Оцените временную сложность алгоритма QPower, вычисляющего b^n . Считайте, что арифметические операции стоят $O(1)$.
2. Вычислите $3^{11} \pmod{107}$.
- Опишем преобразование $\text{SX}(m)$ числа m . Каждая единица двоичной записи числа m заменяется на SX , а ноль на S , после чего вычёркивается первая слева S . Так $\text{bin}(5) = 101 \rightarrow XSSX$. Алгоритм вычисления функции F от положительных целых чисел (x, m) задан псевдокодом.
 - Вычислите $F(3, 5)$.
 - Какую математическую функцию реализует данный алгоритм?
 - Докажите корректность данного алгоритма (нужно доказать, что алгоритм действительно реализует отгаданную функцию).
 - Оцените время работы алгоритма, считая, что арифметические операции стоят $O(1)$.
- Найдите асимптотическую оценку функции $g(n)$, которая возвращает число слов «алгоритм», напечатанных при вызове $G(n)$.
- [Задача о Ханойской башне]. Есть три стержня, на первом из них нанизано n колец разного радиуса; чем ниже лежит кольцо, тем больше радиус. Кольца разрешено перекладывать со стержня на стержень, но только при условии что кольцо меньшего радиуса кладётся на кольцо большего радиуса. Найдите минимальное число перекладываний, требуемое для того, чтобы переложить все кольца с одного стержня на другой. (Найдите как верхнюю, так и нижнюю оценку).
- Во время Дней Физика студентам доступно много разных мероприятий, но некоторые из них могут пересекаться. Вы хотите найти наибольший по количеству набор мероприятий, попарно не пересекающихся по времени проведения. Каждое из n мероприятий задано отрезком времени проведения $[l_i, r_i]$. Предложите $O(n \log n)$ алгоритм решения данной задачи.

7. Дан массив длины n , состоящий только из нулей и единиц. Предложите линейный алгоритм сортировки данного массива.

8. Дан массив из n чисел. Нужно разбить этот массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным. Предложите $O(n \log n)$ алгоритм для решения этой задачи.

9 [Шень 1.1.33]. Функция f с натуральными аргументами и значениями определена так: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n + 1) = f(n) + f(n + 1)$.

1. Построить рекурсивный и итеративный алгоритмы, вычисляющий $f(n)$ и оценить их сложности, считая что арифметические операции стоят $O(1)$.

2. Постройте алгоритм, требующий $O(\log n)$ операций.

10*. Предложите полиномиальный от длины входа алгоритм нахождения минимального решения системы сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

где все m_i — попарно взаимнопростые положительные целые числа. На вход задачи подаётся число k и система из k сравнений.