Вероятность-2

1. Бросают два кубика. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков.

2. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $\mathsf{P}[X < 5] = 1/2$ и $\mathsf{P}[X > 5] = 1/2$. Найдите возможные значения математического ожидания $\mathrm{E}[X]$.

3. Том Сойер красит забор, состоящий из 20 досок. Покрасив очередную доску, он с вероятностью $4/5$ переходит к следующей доске, а с вероятностью $1/5$ уходит купаться (и больше забор не красит). Найдите математическое ожидание количества покрашенных досок. (Обратите внимание, что по правилам хотя бы одну доску он покрасит.)
Указание. решите задачу двумя способами: пользуясь только определением математического ожидания и используя свойство линейности (разложите искомую случайную величину в сумму вспомогательных).

4. Каждый элемент n-элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p. Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p.

5. Выбирается случайное десятиэлементное подмножество S целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы чисел, входящих в S.

6. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков?

7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер n вершин и $nd/2$ ребер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа $(v_1 v_2 \ldots v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более $d/2$ из n пар (v_1, v_2), (v_2, v_3), $\ldots$, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1) являются ребрами графа.

8. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит $4/7$.