

Домашнее задание

1. Алгоритм¹ получает на вход число n (в десятичной записи) и создаёт массив $A[2, \dots, n]$, заполненный нулями. Далее алгоритм выполняет следующую процедуру, пока массив не окажется заполнен единицами. Идёт по массиву от 2 до n пока не встретит первый ноль. Пусть ноль оказался в ячейке с номером k . Тогда алгоритм выводит k и заполняет все ячейки с номерами, кратными k , единицами: идёт по массиву дальше с шагом один и через каждые k клеток записывает в ячейку единицу.

1. Какую последовательность чисел выводит алгоритм?
 2. Оцените временную сложность алгоритма.
 3. Является ли алгоритм полиномиальным?
2. Верно ли, что **а)** $n = O(n \log n)$? **б)** $\exists \varepsilon > 0 : n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$?
3. Известно, что $f(n) = O(n^2), g(n) = \Omega(1), g(n) = O(n)$. Положим

$$h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}.$$

1. Возможно ли, что **а)** $h(n) = \Theta(n \log n)$; **б)** $h(n) = \Theta(n^3)$?
2. Приведите наилучшие (из возможных) верхние и нижние оценки на функцию $h(n)$ и приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$ для которых ваши оценки на $h(n)$ достигаются.
4. Найдите Θ -асимптотику $\sum_{i=1}^n \sqrt{i^3 + 2i + 5}$.
5. Пусть для положительной функции $f(n)$ известно, что $f(n) = (3 + o(1))^n + \Theta(n^{100})$. Верно ли в общем случае, что $\log f(n) = \Theta(n)$?

6. Дана программа
- ```

for (bound = 1; bound * bound < n; bound += 1) {
 for (i = 0; i < bound; i += 1) {
 for (j = 0; j < i; j += 2)
 печать (“алгоритм”)
 for (j = 1; j < n; j *= 2)
 печать (“алгоритм”)
 }
}

```

Пусть  $g(n)$  обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает программа. Найдите  $\Theta$ -асимптотику  $g(n)$ .

- 7\*. Оцените ассимптотику роста функции  $f(n) = \binom{2n}{n}$ .

---

<sup>1</sup>Алгоритм в этой задаче можно оптимизировать, но это не должно вас смущать. В нашем курсе (как и стандартно в математических курсах) нужно решать сформулированную задачу, поэтому, пожалуйста, удержитесь от порывов оптимизировать алгоритм и оценивать его сложность, если этого не требуется в условии.