

Фамилия И.О., группа: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ	оценка

**семинарист:** \_\_\_\_\_

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (за неэффективность снижается оценка), доказать его корректность и оценить время работы.

**1 (3).** На вход программы поступает последовательность из  $n$  целых положительных чисел, все числа в последовательности различны. Рассматриваются все пары различных элементов последовательности, находящихся на расстоянии не меньше чем 4 (разница в индексах элементов пары должна быть 4 или более, порядок элементов в паре неважен). Необходимо определить количество таких пар, для которых произведение элементов делится на 29. Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу.

**2 (2).** Известно, что  $f(n) = O(ng(n))$  и  $g(n) = O(\sqrt{f(n)})$ , где  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Найдите лучшую верхнюю оценку для функции  $f(n)$ .

**3 (4).** Найдите лучшие верхние и нижние оценки на функции, считая, что при малых  $n$ ,  $T(n) = O(1)$ : **а)**  $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$ ;

**б)**  $T(n) = 16T(\frac{n}{3}) + n^2$ ;     **в)**  $T(n) = 125T(\frac{n}{5}) + \frac{n^4}{\sqrt{n \log n + \sin^2 n}}$ .

**4 (2).** Деком называют модифицированный стек, в который можно добавлять и извлекать элементы как сверху, так и снизу. То есть, все операции стека принимают дополнительный параметр: front или back; например, push\_front добавляет элемент на верхушку стека, а push\_back добавляет элемент со стороны дна стека. Опишите реализацию дека с помощью двусвязных списков.

**5 (4).** Решите систему уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 11y + 17z = 19 \end{cases}$$

**6 (3).** Какое минимальное число сравнений может сделать алгоритм сортировки сравнениями в результате своей работы?

**7 (3).** Элементы двоичной кучи с максимальным свойством образуют массив  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ; все элементы попарно различны. Найдите минимальную глубину, на которой может находиться порядковая статистика массива  $a_{(\lfloor n/8 \rfloor)}$ . Корень дерева имеет глубину 0.

**8 (4).** Структура данных «таблица» представляет собой числовую матрицу размера  $m \times n$  (двумерный массив), элементы которой в каждой строке и каждом столбце отсортированы по возрастанию. В случае, если в таблице меньше  $mn$  элементов, в незаполненных клетках написано  $\infty$ . Постройте алгоритм, вставляющий новый элемент в частично заполненную таблицу за  $O(m + n)$ .

**9 (4).** На вход алгоритма подаётся массив натуральных чисел  $A$  и число  $x$ . Постройте алгоритм, работающий за  $O(n \log n)$ , который проверяет, есть ли в массиве  $A$  два элемента, сумма которых равна  $x$ .

**10 (5).** Дан массив пар чисел  $(x_i, w_i)$ , будем называть  $w_i > 0$  весами соответствующих элементов. Пусть сумма  $\sum w_i = W$ . Нужно найти взвешенную медиану этого массива  $m$ , это такое число, что сумма весов элементов массива с  $x_i \leq m$  и сумма весов элементов массива с  $x_i \geq m$  обе больше или равны  $\frac{W}{2}$ . Предложите линейный по числу арифметических операций алгоритм.

**11 (7).** На вход подается массив натуральных чисел  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , предложите эффективный алгоритм нахождения непрерывного подмассива  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  с максимальным произведением количества элементов в подмассиве и минимума по подмассиву

Фамилия И.О., группа: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ	оценка

**семинарист:** \_\_\_\_\_

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (за неэффективность снижается оценка), доказать его корректность и оценить время работы.

**1 (3).** На вход программы поступает последовательность из  $n$  целых положительных чисел, все числа в последовательности различны. Рассматриваются все пары различных элементов последовательности, находящихся на расстоянии не меньше чем 4 (разница в индексах элементов пары должна быть 4 или более, порядок элементов в паре неважен). Необходимо определить количество таких пар, для которых произведение элементов делится на 29. Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу.

**2 (2).** Известно, что  $f(n) = O(ng(n))$  и  $g(n) = O(\sqrt{f(n)})$ , где  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Найдите лучшую верхнюю оценку для функции  $f(n)$ .

**3 (4).** Найдите лучшие верхние и нижние оценки на функции, считая, что при малых  $n$ ,  $T(n) = O(1)$ : **а)**  $T(n) = 50T(\frac{n}{7}) + (\sqrt{n})^3$ ;

**б)**  $T(n) = 15T(\frac{n}{2}) + \frac{n^5 + \cos^2 n}{\sqrt{n \log n}}$ ;     **в)**  $T(n) = 729T(\frac{n}{9}) + n^3$ .

4 (2). Деком называют модифицированный стек, в который можно добавлять и извлекать элементы как сверху, так и снизу. То есть, все операции стека принимают дополнительный параметр: front или back; например, push\_front добавляет элемент на верхушку стека, а push\_back добавляет элемент со стороны дна стека. Опишите реализацию дека с помощью двусвязных списков.

5 (4). Решите систему уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} 3x + 23y = 11 \\ 31y + 37z = 17 \end{cases}$$

6 (3). Какое минимальное число сравнений может сделать алгоритм сортировки сравнениями в результате своей работы?

7 (3). Элементы двоичной кучи с максимальным свойством образуют массив  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ; все элементы попарно различны. Найдите минимальную глубину, на которой может находиться порядковая статистика массива  $a_{(\lfloor n/16 \rfloor)}$ . Корень дерева имеет глубину 0.

**8 (4).** Структура данных «таблица» представляет собой числовую матрицу размера  $m \times n$  (двумерный массив), элементы которой в каждой строке и каждом столбце отсортированы по возрастанию. В случае, если в таблице меньше  $mn$  элементов, в незаполненных клетках написано  $\infty$ . Постройте алгоритм, вставляющий новый элемент в частично заполненную таблицу за  $O(m + n)$ .

**9 (4).** На вход алгоритма подаётся массив натуральных чисел  $A$  и число  $x$ . Постройте алгоритм, работающий за  $O(n \log n)$ , который проверяет, есть ли в массиве  $A$  два элемента, разность которых равна  $x$ .

**10 (5).** Дан массив пар чисел  $(x_i, w_i)$ , будем называть  $w_i > 0$  весами соответствующих элементов. Пусть сумма  $\sum w_i = W$ . Нужно найти взвешенную медиану этого массива  $m$ , это такое число, что сумма весов элементов массива с  $x_i \leq m$  и сумма весов элементов массива с  $x_i \geq m$  обе больше или равны  $\frac{W}{2}$ . Предложите линейный по числу арифметических операций алгоритм.

**11 (7).** На вход подается массив натуральных чисел  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , предложите эффективный алгоритм нахождения непрерывного подмассива  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  с максимальным произведением количества элементов в подмассиве и минимума по подмассиву.