Задание 10

Сложность вычислений: классы P, NP и co-NP

Литература:

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.
   Алгоритмы. Построение и анализ.
   2-е изд. М.: Вильямс, 2005.

1 NP-полные задачи

Задача A является NP-полной, если задача A лежит в NP и любая задача $B \in \mathsf{NP}$ полиномиально сводится к A. Класс NP-полных задач мы будем обозначать NP-с. Формально

$$L \in \mathsf{NP}\text{-c} \Leftrightarrow L \in \mathsf{NP},\ \forall A \in \mathsf{NP} : A \leqslant_m^p L.$$

Приведём пример NP-полной задачи.

Пример 1. Язык SAT состоит из всех выполнимых булевых формул ϕ, заданных в конъюнктивной нормальной форме.

$$\mathrm{SAT} = \{\phi \,|\, \exists y_1, \dots, y_n : \phi(y_1, \dots, y_n) = 1\}$$

Теорема (Кук, Левин)**.** *Язык* SAT *является* NP*-полным.*

Упражнение 1. Изучить доказательство теоремы Кука-Левина.

Определим язык 3-SAT как язык, состоящий из выполнимых булевых формул, каждый дизъюнкт которых содержит ровно три литерала. Пример такой формулы:

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_4 \vee x_5 \vee x_1).$$

Задача 1. Показать, что 3-SAT $\in \mathsf{NP}$-c

Задача 2. Показать, что 2-SAT $\in \mathsf{P}$.

Также нам интересен класс co-NP, состоящий из языков, дополнение которых лежит в NP.

Определим язык UNSAT как язык состоящий из невыполнимых булевых формул, заданных КНФ. То есть

$$\mathrm{UNSAT} = \{\phi \,|\, \forall y_1, \ldots, y_n : \phi(y_1, \ldots, y_n) = 0\}$$

Упражнение 2. Показать, что язык UNSAT лежит в классе co-NP.

Упражнение 3. Показать, что язык UNSAT является co-NP-полным относительно полиномиальной $m-$сводимости.

2 Домашнее задание

Задачи из канонического задания № 16-20, задачи 1-2 из данного текста.