Задание 6

Потоки

Литература:

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.
   Алгоритмы. Построение и анализ.
   2-е изд. М.: Вильямс, 2005. Глава 26.

1 Предисловие

В тексте задания фактически собраны определения. Я бы рекомендовал сначала прочитать задание и постараться сделать упражнения самостоятельно, после чего переходит к Кормену – в нём дано решение многих упражнений. Я считаю, что самостоятельно поломать голову перед тем, как переходить к чтению Кормена будет полезно.

2 Работа с определениями

Транспортная сеть – это ориентированный граф $G = (V, E)$, на вершинах которого определена функция пропускной способности $c(u, v)$. Основное свойство функции пропускной способности: $c(u, v) > 0$ тогда и только тогда, когда $(u, v) \in E$, в противном случае, $c(u, v) = 0$. Будем считать, что если ребро (u, v) лежит в E, то ребро (v, u) не лежит в E. Зафиксируем две вершины: источник s и сток t. Функция f называется *потоком* в сети G, если выполняются следующие условия:

- $f(u, v) \leqslant c(u, v)$ – ограничение пропускной способности;
- $f(u, v) = -f(v, u)$ – антисимметричность;
- $\forall u \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$ – сохранение потока.

Упражнение 1. Покажите, что закон сохранения потока – аналог закона Кирхгофа, то есть сумма значений f на рёбрах входящих в вершину, не равную s или t, равна сумме значений f на рёбрах исходящих из вершины.

Назовём величиной потока f число

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v).$$

Упражнение 2. По определению, величина потока есть величина потока, выходящего из s. Покажите, что $|f|$ есть также величина потока, входящего в t.

Доопределим функцию f на множествах вершин.

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$$

Задача 1. Доказать следующие соотношения (Лемма 26.1 из Кормена):

1. $\forall X \subseteq V : f(X, X) = 0.$
2. $\forall X, Y \subseteq V : f(X, Y) = -f(Y, X).$

3.a. $\forall X, Y, Z \subseteq V, X \cap Y = \varnothing : f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z).$

3.b. $\forall X, Y, Z \subseteq V, X \cap Y = \varnothing : f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y).$

Задача 2. Верно ли, что $f(X, Y) = -f(V - X, Y)$?

Определим сумму потоков f_1 и f_2 как $(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$.

Упражнение 3. Найти необходимые и достаточные условия того, что сумма потоков является потоком.

Упражнение 4. Пусть в транспортной сети был задан поток f_1. Для потока f_1 методом Форда-Фалкерсона найден увеличивающий путь. Покажите, что увеличивающему пути можно поставить в соответствие поток f_2 и после увеличения потока f_1 итоговый поток будет равен сумме потоков $f_1 + f_2$.

Остаточным графом транспортной сети с потоком f называется ориентированный граф, вершины которого совпадают с V, а на ребре (u, v) стоит число $c(u, v) - f(u, v)$. Если разность равна нулю, то ребра в остаточной сети нет.

3 Задачи, сводящиеся к потокам

Одним из самых распространённых примеров задач, сводящихся к задаче о поиске максимального потока, является задача о поиске максимального паросочетания в двудольном графе. Будем считать, что множество вершин V двудольного графа графа $G(V, E)$ разбито на две доли: $V = L \sqcup R$. Напомним, что граф называется двудольным, если рёбра есть только между долями, формально $V \subseteq L \times R$.

Определение 1. Паросочетанием в двудольном графе называется такое подмножество рёбер, что рёбра в нём не имеют общих вершин.

Для паросочетаний много естественных аналогий, например можно считать, что в левой доле находятся мальчики, в правой находятся девочки и нам нужно их пережениить. Паросочетание называется *совершенным*, если для каждой вершины из графа есть ребро, входящее в паросочетание, то есть, если в результате паросочетания пары образовались между всеми мальчиками и девочками.

На семинаре мы обсудили конструкцию сведения задачи о поиске максимального паросочетания к задаче о максимальном потоке, но не обсудили доказательство, а оно там не такое очевидное, как кажется сходу. Учтите это при решении домашнего задания. Неочевидность этой сводимости возникает в одном из доказательств теоремы Холла.

Теорема (Холл)**.** *В двудольном графе существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любых k вершин, $k \leqslant |L| = |R|$, из L существует как минимум k вершин из R, таких что каждая из R-вершин соединена с какой-то L-вершиной.*

Задача 3. Докажите теорему Холла, используя задачу о максимальном потоке.

Многие утверждения, сформулированные на языке графов являются довольно общими математическими утверждениями. В частности, теорема Холла имеет эквивалентную формулировку на языке теории множеств.

Теорема (Холл)**.** *Для семейства множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда в объединении любых k множеств из семейства лежит не меньше k элементов. В случае конечных множеств, число k не привосходит размер семейства множеств.*

Заметим, что теорема Холла верна и для бесконечных семейств множеств. Более того, её формулировка на языке теории графов так же верна в случае бесконечных графов.

Задача 4*. Доказать теорему Холла для бесконечных множеств.

4 Домашнее задание

Задачи из задания № 28-31. Все задачи, кроме помеченных звёздочкой, из этого текста.