

Задание 1

Алгоритмы и оценка сложности

Литература:

1. **[ДПВ]** Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. М.: МЦНМО, 2014.
2. **[Кормен 1]** Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: Построение и Анализ. М.: МЦНМО, 2002.
3. **[Кормен 2]** Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: Построение и Анализ. (2-е изд.) М.: Вильямс, 2005.

1 Предисловие

Основными учебниками по нашему курсу будут книги **[Кормен 1]**, **[Кормен 2]** – первое и второе издание книги «Алгоритмы построение и анализ» (Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L., Stein, Clifford) и **[ДПВ]** – «Алгоритмы» (Dasgupta S., Papadimitriou C. H., Vazirani U. V.) . Эти книги доступны в библиотеке (Кормен в меньшей степени) и в сети. К каждому семинару я буду говорить какие главы по ней стоит прочесть. Составляя задание я буду считать, что вы приступили к его исполнению, прочитав соответствующие главы. Поэтому, в отличие от прошлого семестра, я практически не буду писать теории, а просто буду акцентировать внимание на некоторых моментах.

После первого семинара стоит изучить первые главы **[Кормен 1]**, главы 0 и 2 **[ДПВ]** и основную теорему о рекурсии в любом из Корменов и в ДПВ. Глава 1 из **[ДПВ]** также будет полезна.

Поскольку в домашнем задании будет много задач, я призываю вас придерживаться следующей стратегии.

- Первоначально решать задачи, помеченные символом \circ – эта пометка означает, что задача во-многом ликбезовская.

- Старайтесь решать задачи самостоятельно. Обсуждать с друзьями задачи можно и нужно, но не превращайте это в коллективную деятельность.
- В связи с предыдущим пунктом. Записывайте только те решения, которые вы понимаете. И не пытайтесь делать копипасты, пусть даже переработанные.

2 Анализ алгоритмов

Одна из важных задач нашего курса – оценивать время работы алгоритма. При выполнении этого действия необходимо помнить с какой моделью вычислений мы работаем – например, на двухленточной машине Тьюринга копирование¹ любого слова можно осуществить за $2n$ шагов, что несправедливо для одноленточной МТ.

В ближайшее время (скорее всего до начала изучения классов сложности) мы будем предполагать, что имеем дело с RAM-моделью. Говоря нестрого, можно считать, что мы пишем программы, например, на языке С и примитивные операции, например присвоения, а, в зависимости от контекста, и сложение с умножением стоят константу времени. Например, если нас интересует быстрое умножение чисел, то нельзя за константу принимать сложение и умножение этих чисел. Пока нас будет интересовать только оценка времени работы алгоритма.

Пример 1. На вход подаётся число n , необходимо найти все простые числа до n включительно. Приведён псевдокод решения этой задачи:

¹На вход подаётся слово x , на выходе должно быть написано слово xx .

```

for  $i := 2$  to  $n$  do
  | Prime[ $i$ ] := True  $\rightarrow c_1$ 
end
for  $i := 2$  to  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  do
  | if Prime[ $i$ ] == True  $\rightarrow c_2$  then
    |  $j := 0 \rightarrow c_3$ 
    | while  $i*i + i*j \leq n \rightarrow c_4$  do
      | Prime[ $i*i + i*j$ ] = False  $\rightarrow c_5$ 
      |  $j = j + 1 \rightarrow c_6$ 
    | end
  | end
end

```

После выполнения этого кода Prime[i] будет истинно тогда и только тогда, когда число i простое. Подробно прочитать об этом алгоритме можно, например, в [Википедии](#).

Псевдокод выписан для оценки сложности работы алгоритма. Обозначение $\rightarrow c_i$ означает, что данная операция стоит константу c_i . Сейчас мы приведём верхнюю оценку сложности. Для этого суммируем вклад каждой учтённой нами операции в сложность алгоритма:

$$T(n) \leq c_1 n + \sum_{i=2}^{i=\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (c_2 + c_3 + \lfloor n/i - i \rfloor (c_4 + c_5 + c_6))$$

Делая эту оценку, мы считали, что каждый раз попадаем внутрь оператора **if**. Как мы видим, часть констант в формуле можно заменить одной, так как сумма констант – константа.

$$T(n) \leq c_1 n + (\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1) d_1 + \sum_{i=2}^{i=\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \lfloor n/i - i \rfloor d_2$$

Но поскольку при асимптотических оценках, константны нам вообще не особо интересны, то мы можем взять среди всех этих констант максимальную и вынести её за скобки.

$$T(n) \leq cn + c(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1) + c \sum_{i=2}^{i=\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \lfloor n/i - i \rfloor$$

$$T(n) \leq cn + c(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1) + c(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1)(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor + n/2 - 2)$$

Переходя к асимптотическим оценкам мы можем избавиться от членов cn и $c(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1)$ и получим, что $T(n) = O(n\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$.

Для получения этой верхней оценки можно было затратить куда меньше сил, а именно оценить последнюю сумму как $n\lfloor \sqrt{n} \rfloor$, поскольку всего в цикле алгоритм делает $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ шагов и внутри второго цикла он делает не более, чем n шагов. Поэтому, любые вложенные циклы можно оценивать сверху как произведение числа их операций, а для более улучшенного результата нужна более тонкая оценка.

Почему при оценке числа шагов некоторые строчки мы не учитывали, например **for** $i := 2$ **to** n , а некоторые например **while** $i*i+i*j \leq n$ учитывали? Потому что изменение аргумента на цикле **for** для нас естественно и незначимо – можно считать, что мы его загнали во все константы внутри **for**, в то же время, проверка условия $i*i+i*j \leq n$ требует нескольких операций, но каждую из них мы считаем константой и поэтому оцениваем проверку выполнения этого условия константой. Легко заметить, что все строчки на одном уровне цикла мы могли оценить в одну константу – нас фактически интересует только уровень вложения операции. Так, не учитывая, например, проверку условия в **while**, мы бы получили тот же результат.

Хороша ли эта оценка? На самом деле нет. Предложение о том, что каждый раз на операторе **if** мы попадаем внутрь цикла сильно зави́сило нашу оценку. Из теоретико-числовых соображений следует оценка $O(n \log \log n)$ в модели RAM.

3 Алгоритм Карацубы

Этот алгоритм интересен тем, что с его помощью можно перемножить два числа быстрее чем за квадратичное время, которое даёт обычный алгоритм, которому учат в школе. Это простой и изящный алгоритм, который опроверг «гипотезу n^2 » о том, что числа не могут быть перемножены быстрее, чем за квадратичное время. Сложность этого алгоритма мы оценим на ближайшем семинаре, а пока опишем сам алгоритм.

Пусть есть два числа x и y . Запись $x = x_1x_0$, $y = y_1y_0$ означает, что $x = x_1 \times 10^m + x_0$, $x_0 \leq 10^m$. то есть, число x в десятичной записи разбивается на два числа x_1 и x_0 , причём их конкатенация даёт x . Умножение в рамках данной задачи мы будем обозначать символом \times . Заметьте, что алгоритм не зависит от системы счисления, поэтому вместо основания

10, как например в задании, может быть основание 2.

Алгоритм основан на следующем факте:

$$\begin{aligned}x \times y &= (x_1 \times 10^m + x_0)(y_1 \times 10^m + y_0) = \\&= x_1 \times y_1 \times 10^{2m} + x_0 \times y_0 + (x_1 \times y_0 + y_1 \times x_0) \times 10^m = \\&= z_2 \times 10^{2m} + z_0 + z_1 \times 10^m\end{aligned}$$

причём $z_1 = (x_1 \times y_0 + y_1 \times x_0) = (x_1 + x_0) \times (y_1 + y_0) - z_2 - z_0$.

Таким образом, для вычисления произведения $x \times y$ требуется не 4 умножения, а 3: по одному для вычисления z_2 и z_0 , а потом ещё одно для вычисления z_1 . Алгоритм применяется рекурсивно, то есть вспомогательные произведения z_i тоже вычисляются по данному алгоритму.

4 Домашнее задание

Задачи из канонического задания на первую неделю (**1-5**).

Задача 1°. Найдите лучшую оценку на $T(n)$. Обратите внимание, что просто брать $f(n)$ вместо, скажем, $O(f(n))$ и используя основную теорему о рекурсии писать результат в качестве ответа некорректно!

1. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + \Theta(n^2)$
2. $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + \Omega(n)$
3. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + O(n)$

Задача 2°. Приведите верхнюю и нижнюю асимптотические оценки для функций.

1. $f(n) = n^{2+\sin n}$
2. $f(n) = \frac{n^3 - n^2}{n + \log n}$

Задача 3°. Докажите, что $\forall \varepsilon > 0 : n \log n = O(n^{1+\varepsilon})$.

Упражнение 1. Сравните формулировки основной теоремы о рекурсии из книг [Кормен 1/2] и [ДПВ]. Убедитесь, что из первой следует вторая.

Решение к упражнениям присылать не обязательно.