Задание 2

Алгоритмы «разделяй и властвуй». Арифметические операции и линейные рекуррентные последовательности

Литература:

1. **[ДПВ]** Глава 2. *Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У.*
   Алгоритмы.
   М.: МЦНМО, 2014.

2. **[Кормен 2]** Главы 3-4. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.*
   Алгоритмы: Построение и Анализ. (2-е изд.)
   М.: Вильямс, 2005.

3. **[Кормен 1]** *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.*
   Алгоритмы: Построение и Анализ.
   М.: МЦНМО, 2002.

4. **[Кнут 2]** *Кнут Д.Э.*
   Искусство программирования (Том 2. Получисленные алгоритмы)
   3-е изд. М.: Вильямс, 2001. Подраздел 4.6.3 (с. 503-528).

Обзор задания

Задание посвящено анализу асимптотики алгоритмов «разделяй и властвуй» – рекурсивных алгоритмов. Их анализ сводится к анализу рекуррентных соотношений на их время работы. Многие из этих соотношений разрешимы с использованием основной теоремы о рекурсии, в общем же случае необходимо построить дерево рекурсии и подсчитать количество операций. Ещё одним частным случаем, не укладывающимся в основную теорему, являются линейные рекуррентные последовательности.

Основными задачами этого задания (задачи с пометкой $\circ$) являются задачи канонического задания. **Внимание!** Выложен файл с начальным отрезком канонического задания этого года.

P.S. В конце семинара меня спросили почему приведённое доказательство асимптотики для k-й порядковой статистики справедливо. Я рекомендую изучить раздел 4.1 **[Кормен 2]** – в нём содержится ответ на этот вопрос. Также в **[Кормен 1,2]** приведено честное доказательство асимптотики данного алгоритма.

1 Быстрое умножение матриц

В этой части мы рассмотрим алгоритм Штрассена для умножени матриц. Для начала опишем его для матриц размера 2×2

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как и в случае алгоритма Карацубы нам потребуются вспомогательные произведения:

$$\begin{aligned}
m_1 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}), \\
m_2 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}), \\
m_3 &= (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12}), \\
m_4 &= (a_{11} + a_{12})b_{22}, \\
m_5 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}), \\
m_6 &= a_{22}(b_{21} - b_{11}), \\
m_7 &= (a_{21} + a_{22})b_{11}.
\end{aligned}$$

Элементы матрицы C найдём по формулам:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= m_1 + m_2 - m_4 + m6, \\
c_{12} &= m_4 + m_5, \\
c_{21} &= m_6 + m_7, \\
c_{22} &= m_2 - m_3 + m_5 - m_7.
\end{aligned}$$

Алгоритм Штрассена определяется рекурсивно для матриц порядка $2^n \times 2^n$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = C.$$

Упражнение 1. Оцените асимптотику работы алгоритма Штрассена. Проверьте ваше решение, изучив анализ в книге **[ДПВ]**.

Упражнение 2. Доказать, что алгоритмы Карацубы и Штрассена применимы для умножения элементов любого кольца и матриц над любым кольцом соответственно.

2 Линейные рекуррентные последовательности

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется линейно рекурентной последовательностью порядка d, если для всех $n > d$ для неё справедлива формула

$$a_n = \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}.$$

Коэффициенты c_i не зависят от n. Линейные рекурентные последовательности замечательны тем, что их члены можно находить возводя в степень матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Взяв вектор $\vec{a} = (a_d, a_{d-1}, \dots, a_2, a_1)$ и умножив его на матрицу A^n мы получим $A^n\vec{a} = (a_{n+d}, a_{n+d-1}, \dots, a_{n+2}, a_{n+1})$.

Упражнение 3. Построить алгоритм, использующий для вычисления a_n возведение в степень матриц и оценить его сложность. В качестве алгоритма умножения матриц использовать алгоритм Штрассена.

Рассмотрим многочлен $p(\lambda) = \lambda^d - c_1\lambda^{d-1} - c_2\lambda^{d-2} - \dots - c_d$ который назовём *характерестичеким многочленом* последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Упражнение 4. Показать, что характеристический многочлен $p(\lambda)$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ совпадает с характеристическим многочленом матрицы A.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ – различные корни характеристического многочлена $p(\lambda)$.

Задача 1*. Показать, что в этом случае справедлива формула $a_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n + \dots + k_d\lambda_d^n$, где k_i – некоторые коэффициенты.

Упражнение 5. Найти формулу для a_n в случае произвольной кратности корней характеристического многочлена $p(\lambda)$.

Также для вычисления a_n можно использовать её производящую функцию. Напомним, что производящей функцией последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд $G(a_n, x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_m x^{m+1} \ldots$.

Упражнение 6. Показать, что производящая функция $G(a_n, x)$ линейно рекурентной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ порядка d имеет вид

$$G(a_n, x) = \frac{a_1 + a_2 x + \ldots + a_d x^{d-1}}{1 - x^d}.$$

Упражнение 7. Решите **задачу 4-5** из **[Кормен 2]**.

С линейными рекурентными последовательностями связана интересная открытая проблема – проблема Сколема. Она состоит в проверке того, встречается ли в линейной рекурентной последовательности 0. Доказано, что проблема Сколема разрешима только для частных случаев ЛРП, насколько я знаю для $d \leqslant 5$, возможно есть более свежие результаты.

Задача 2*. Показать, что проблема Сколема разрешима для ЛРП порядка $d = 1, 2, 3$.

3 Домашнее задание

Основные задачи°

Задачи из канонического задания **6, 7, 8**.

Дополнительные задачи

Эти задачи нужно пытаться решать, если вы претендуете более чем на удовлетворительную оценку.

Задача Д-3 канонического задания.

Задача 3. На плоскости отмечены квадраты с целыми сторонами, левый нижний угол которых – точка $(0, 0)$. Необходимо найти точку на плоскости, которая покрывается ровно k квадратами (или установить,

что такой точки нет). Приведите как можно более быстрый алгоритм, решающий данную задачу.
Вход задачи: $n, a_1, a_2, \ldots, a_n, k$, где n – количество квадратов, a_i – длина стороны i-го квадрата.

Бонусные задачи

Задачи со звёздочкой из этого текста. Другие дополнительные задачи канонического задания.