Задание 8

Контекстно-свободные языки и магазинные автоматы II

Ключевые слова [1]:*язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, метод математической индукции.*

1 КС-грамматики

1.1 Определение

Вспомним сначала что такое грамматика.

Определение 1. Грамматикой Г называется четвёрка (N, T, P, S), где

- N – множество нетерминальных символов
- T – множество терминальных символов
- P – множество правил вывода, $P \subseteq (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$.
- S – аксиома, $S \in N$.

При этом, $N \cap T = \emptyset$, нетерминалы обычно обозначаются заглавными буквами $A, B, C, \ldots$, терминалы обычно обозначаются строчными буквами и/или цифрами, смешанные цепочки из $(N \cup T)^*$ обозначают греческими буквами α, β, γ. Слово $w \in T^*$ порождается грамматикой Г, если существует последовательность правил вывода, начинающаяся с правила вида $S \to \alpha$, в результате применения которых порождается слово w. Под применением правила $\alpha \to \beta$, понимается, что подслово α заменяется на подслово β

Грамматика называется *контекстно-свободной* (тип 2 по Хомскому), если все правила грамматики имеют вид $A \to \alpha$, где A – нетерминал, а α – цепочка, которая может состоять как из терминалов, так и нетерминалов.

При записи правил так же используются вспомогательное обозначение $A- > \alpha|\beta$, которое означает, что есть два правила: $A \to \alpha$ и $A \to \beta$.

[1] минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Пример 1. Грамматика G задана правилами:

$$S \to aAB$$
$$A \to aA|a$$
$$B \to bB|b$$

Слово $aabb$ выводится грамматикой. Последовательность применений правил вывода такая:

$$S$$
$$S \to aAB$$
$$aAB$$
$$A \to a$$
$$aaB$$
$$B \to bB$$
$$aabB$$
$$B \to b$$
$$aabb$$

1.2 Вывод, левый вывод, дерево разбора

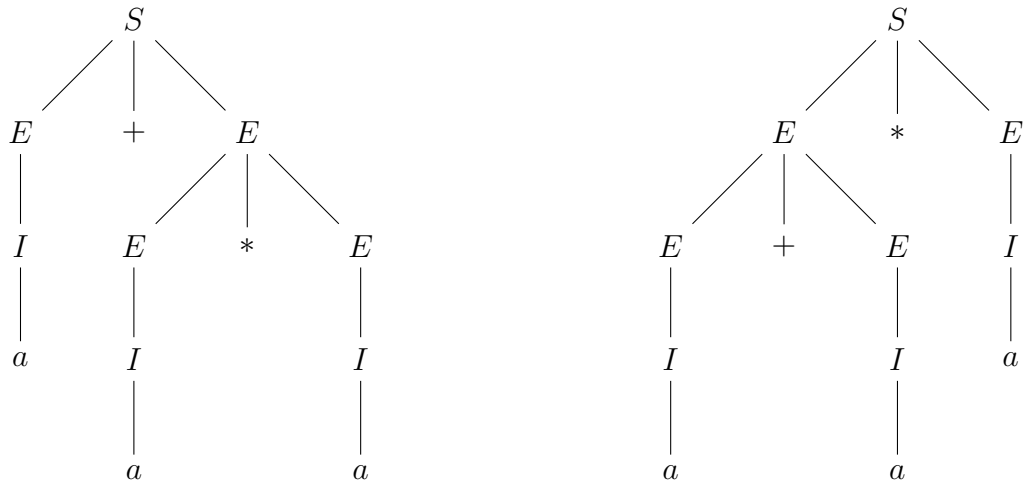
Выводом цепочки α называется такая последовательность применений правил с указанием раскрываемого нетерминала, что применяя правила из неё начиная с аксиомы получается цепочка α. Если цепочка α не содержит нетерминалов, то α принадлежит языку, порождаемому КС-грамматикой. Нам будет удобно пользоваться такими понятиями как левый вывод и правый вывод. *Левым выводом* называют такой вывод, что на каждом его шаге раскрывается самый левый нетерминал в промежуточной цепочке. Вывод в примере 1 является левым. Правый вывод определяется аналогично.

Также мы будем использовать деревья вывода. С формальным определением дерева вывода вы можете познакомиться, например, в книге Хопкрофта, Мотвани и Ульмана, а мы рассмотрим пример деревьев вывода и затем дадим неформальное описание этого понятия.

Пример 2. Грамматика G, $T = \{a, +, *\}$ задана правилами:

$$S \to E$$
$$E \to E + E$$
$$E \to E * E$$
$$E \to I$$
$$I \to a$$

Построим деревья вывода для слова $a + a * a$:



Теперь опишем понятие дерева вывода, которое также называется деревом разбора. Зафиксируем грамматику G. *Деревом вывода* для слова w называется упорядоченное дерево, в корне которого находится аксиома S, каждая вершина помечена нетерминалом, терминалом или пустым словом, если вершина помечена терминалом или ε, то эта вершина является листом, если же вершина помечена нетерминалом A, то для некоторого правила $A \to X_1 X_2 \dots X_n \in P$ ($X_i \in N \cup T$) вершины-дети A помечены символами $X_1, X_2 \dots X_n$ слева направо. Листья дерева вывода образуют слово w.

Как мы видим, синтаксически деревья вывода принципиально разные: в первом случае выражение интерпретируется как $a + (a * a)$, а во втором как $(a + a) * a$, что приводит к непредсказуемому результату при выполнении стандартных операций!

Эта проблема приводит нас к новому важному понятию – неоднозначности. Грамматика G является *неоднозначной*, если хотя бы для одного слова существует два различных дерева вывода.

Левый и правый вывод помимо удобства важны тем, что они фактически задают порядок обхода дерева вывода, поэтому каждому левому выводу соответствует ровно одно дерево разбора, а каждому дереву забора соответствует ровно один левый вывод.

Упражнение 1. Доказать, что грамматика G является однозначной тогда и только тогда, когда каждое слово, порождаемое G имеет ровно один левый(правый) вывод.

2 От КС-грамматик к МП-автоматам

Приведём алгоритм построения МП-автомата по описанию КС-грамматики и докажем его корректность.

Для каждой грамматики G введём вспомогательное отношение $\Rightarrow$ на множестве $(N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$. будем говорить, что $\alpha \Rightarrow \beta$, если существует правило, которое переводит цепочку α в цепочку β. Отношение $\Rightarrow_L$ определим аналогично, только с условием, что цепочка β имеет левый вывод из α. Если цепочка β выводится из α за k шагов, будем обозначать это как $\alpha \Rightarrow^k \beta$. Будем также использовать транзитивное замыкание $\Rightarrow^*$ отношения $\Rightarrow$. Неформально, $\alpha \Rightarrow^* \beta$, если для некоторого k выполняется $\alpha \Rightarrow^k \beta$.

Построение. По КС-грамматике $G = (N, T, P, S)$, построим N-автомат[2] $M = (T, N \cup T, q_0, q_0, S, \delta, \emptyset)$. Как видно из описания автомата, он содержит ровно одно состояние. Осталось описать только функцию переходов δ. Она устроена следующим образом:

- $A \to \alpha \in P \Rightarrow \delta(q_0, \varepsilon, A) \vdash (q_0, \alpha)$;
- $\forall \sigma \in T : \delta(q_0, \sigma, \sigma) \vdash (q_0, \varepsilon)$;

Корректность. Покажем, что $L(G) \subseteq L(M)$. Поясним неформально принцип работы автомата. В начале работы автомата, на дне стека лежит аксиома S. Если слово w выводится грамматикой G, то существует левый вывод данного слова. Автомат будет имитировать левый вывод

[2]МП-автомат, допускающий по пустому стеку

следующим образом. Если на верхушке стека находится нетерминал A, то необходимо продолжить левый вывод и применить очередное правило. Если же на верхушке стека находится последовательность терминалов, то она является префиксом необработанной части слова w, а значит считывая терминалы из стека и «сокращая» их с терминалами w автомат добирается до ближайшего левого нетерминала в выведенной цепочке и продолжает левый вывод или же добирается до дна стека и в случае совпадения содержимого стека с необработанной частью w, слово w будет принято, в противном случае, автомат аварийно завершит работу.

Теперь формально.

Утверждение 1. *Если на верхушке стека лежит нетерминал A, $A \Rightarrow_L^* u$, при этом автомат M находится в конфигурации $(q_0, uv, A\alpha)$, то $(q_0, uv, A\alpha) \vdash^* (q_0, v, \alpha)$.*

Доказательство. Проведём доказательство по индукции, параметром индукции будет длина k левого вывода $\Rightarrow_L^k$.

База: $k = 1$. Тогда существует правило $\delta(q_0, \varepsilon, A) \vdash (q_0, u)$, а далее необработанный префикс u сокращается со словом u на верхушке стека, следовательно $(q_0, uv, A\alpha) \vdash^* (q_0, v, \alpha)$.

Переход: пусть утверждение верно для $k = n$, покажем что оно верно для $n + 1$. Пусть первый вывод в цепочке левого вывода u из A будет $A \to u_1 B\beta$, $u_1 \in T^*$.Тогда $u = u_1u_2$ и $(q_0, u_1u_2v, A\alpha) \vdash^* (q_0, u_2v, B\beta\alpha)$ – если $u_1 \neq \varepsilon$, то необработанный префикс u_1 сокращается с u_1 в стеке. Но $B\beta \Rightarrow_L^k u_2$, а отсюда следует, что $u_2 = u_3u_4$, и $B \Rightarrow_L^l u_3$, причём $l \leqslant n$, а значит $(q_0, u_2v, B\beta\alpha) \vdash^* (q_0, u_3v, \beta\alpha)$ по предложению индукции. Продолжая сокращать префикс u_i с терминалами в стеке и пользоваться тем фактом, что очередной префикс u_i выводится из нетерминала в цепочке β за не большее чем n число выводов, получим, что β удаляется из стека, то есть $(q_0, u_3v, \beta\alpha) \vdash^* (q_0, v, \alpha)$. □

В частности, из утверждения 1 следует, что если $S \Rightarrow_L w$, то $(q_0, w, S) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$, что и означает, что $w \in L(M)$.

Покажем теперь, что $L(M) \subseteq L(G)$. Каждой успешной[3] последовательности конфигураций на входе w автомата M соответствует левый вывод w в грамматике G. А именно каждому переходу $\delta(q_0, \varepsilon, A) \vdash (q_0, \alpha)$ соответствует применению правила $A \to \alpha$ на шаге вывода.

[3]Под «успешной» мы понимаем, что на этой последовательности конфигураций слово w было принято автоматом.

Докажем это.

Упражнение 2. Доказаьть, что если $(q_0, u, \alpha) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$, то $\alpha \Rightarrow_L^* u$.

Отсюда следует, что если $w \in L(M)$, то $w \in L(G)$, т.к. первое влечёт $(q_0, w, S) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$.

3 Задачи

Задача 1. Даны языки $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geqslant 0\}$, $L_2 = \{f^n a^m b^m \mid n, m \geqslant 0\}$. Построить однозначную КС-грамматику, порождающую язык $L = L_1 \cup L_2$ и детерминированный МП-автомат, распознающий язык L. За однозначность грамматики и детерминированность автомата дополнительные очки. Если не получается их построить, стройте неоднозначную КСГ/недетерминированный МП-автомат.

Задача 2. Построить КС-грамматику или МП-автомат для языка $\{xcy \mid x \neq y, x, y \in \{a, b\}^*\}$.

Расширенным МП-автоматом называется МП-автомат, который может извлекать из стека за такт работы не обязательно один, а возможно несколько символов, но при этом не более чем некоторое константное число c. Таким образом, в нём допустимы правила вида $\delta(q, a, \alpha) \vdash (p, \beta)$, где $\alpha < c$.

Задача 3. Доказать, что если M является расширенным МП-автоматом, то существует МП-автомат M', такой что $L(M) = L(M')$. Докажите, что если M детерминированный автомат, то найдётся и детерминированный автомат M'.

На семинаре я вас обманул, сказав что МП-автомат с одним состоянием можно легко получить взяв за алфавит стека $Q \times \Gamma$. Для обычных МП-автоматов это неверно.

Задача 4†. Докажите, что для расширенного МП-автомата M есть расширенный МП-автомат M' с одним состоянием, алфавит стека которого есть $Q_M \times \Gamma_M$.

МП-автоматом с предпросмотром назовём МП-автомат, который может считывать с входной ленты не более, чем константное число символов. При этом, ему на вход подаётся слово $w\$$, где $\$$ – маркер конца слова, $w \in \Sigma^*$, $\$ \notin \Sigma$, алфавит автомата – $\Sigma \cup \{\$\}$. Таким образом, в нём

допустимы правила вида $\delta(q, u, x) \vdash (p, z)$, $\delta(q, v\$, x) \vdash (p, z)$ где $|u| < c$ и $|v\$| < c$.

Задача 5*. Доказать, что если M является МП-автоматом с предпросмотром, то существует МП-автомат M', такой что $L(M) = L(M')$.