

Теория вычислений

Недели 3-4. Контекстно-свободные языки

Если в задаче не указан алфавит и он не ясен из контекста, то языки в задаче определены над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Построить для следующих языков КС-грамматики

- а) $L_1 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$ б) $L_2 = \{w \mid w \neq w^R\}$ в) $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k\}$;
г) язык из слов нечётной длины, содержащих по центру символ a ; д) $\Sigma^* \setminus \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

2. Построить для следующих языков МП-автоматы (*с двумя символами в алфавите стека, один из которых маркер дна, который никогда не извлекается и не добавляется повторно).

- а) $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$; б) $L_2 = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$; в) L_3 ; г) $\{xy \mid |x| = |y|, y \in \Sigma^* a \Sigma^*\}$

3. Является ли язык $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}$ КС-языком?

4. Пусть $A, B \in \text{CFL}$, $R \in \text{REG}$. Верны ли следующие утверждения (для произвольных A, B, R):

- а) $A \cup B \in \text{CFL}$; б) $A \cap B \in \text{CFL}$; в) $A \setminus B \in \text{CFL}$; г) $A \cdot B \in \text{CFL}$; д) $A^* \in \text{CFL}$; е) $A \cap R \in \text{CFL}$.

5. Являются ли следующие языки КС-языками?

- а) $\{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ б) $L_{uu} = \{w \mid uu, u \in \Sigma^*\}$ в) $\Sigma^* \setminus L_{uu}$ г) $\{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

6. Доказать, что для КС-грамматики G существует эквивалентная грамматика G' ($L(G) = L(G')$), такая что для любого нетерминала A грамматики G' существует вывод сентенциальной формы, в которую входит A : $S \Rightarrow^* \alpha A \beta$; и из любой сентенциальной формы для G' выводится некоторое слово $\forall \alpha \exists w : \alpha \Rightarrow^* w$.

7. Доказать, что для любой КС-грамматики G существует эквивалентная грамматика в нормальной форме Хомского (НФХ). Правила грамматики в НФХ имеют вид $A \rightarrow BC$ или $A \rightarrow a$, за исключением аксиомы, для которой допустимо правило $S \rightarrow \epsilon$. При этом, аксиома никогда не встречается в правой части правил.

8. Дан МП-автомат распознающий язык L . Описать процедуру построения МП-автомата, распознающего язык $\text{prefix}(L) = \{x \mid \exists y : xy \in L\}$, состоящий из всех префиксов слов языка L .

Недели 3-4. Контекстно-свободные языки

Определение. КС-грамматика называется линейной, если в правые части правил вывода входит не более одного нетерминала.

1. Докажите, что язык $L_{=} = \{w : |w|_a = |w|_b\}$ не порождается ни одной линейной КС-грамматикой.
2. Определим бесконечное вправо слово $W = ababbab^3a \dots ab^n ab^{n+1}a \dots$. Являются ли языки $\text{prefix}(W)$ и $\Sigma^* \setminus \text{prefix}(W)$ КС-языками?

Определение. КС-грамматика называется однозначной, если для любого слова, выводимого в грамматике, существует единственное дерево вывода. КС-язык называется существенно неоднозначным, если его не порождает ни одна однозначная КС-грамматика.

3. Докажите, что язык $\{a^n b^m c^k \mid n = m \vee n = k\}$ является существенно неоднозначным.
4. Пусть M – магазинный автомат. Определим язык $\text{Stack}(M)$ допустимого содержимого стека МП-автомата M . Слово α принадлежит языку $\text{Stack}(M)$ тогда и только тогда, когда для некоторого слова $uv \in L(M)$ выполнено $(q_0, uv, z_0) \vdash^* (q, v, \alpha) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$, где q_f – принимающее состояние. То есть, язык $\text{Stack}(M)$ состоит из всех слов, которые появляются в стеке автомата M при успешном ходе на некотором слове. Докажите, что язык $\text{Stack}(M)$ является регулярным.
5. Докажите, что проблема универсальности для КС-языков алгоритмически неразрешима. Проблема универсальности состоит в следующем: определить совпадает ли язык, заданный КС-грамматикой, с множеством всех слов.
6. Докажите, что проблема однозначности КС-грамматики алгоритмически неразрешима.

Премия Гёделя 2002 г.

Определение. МП-автомат называется детерминированным, если его отношение переходов является функцией.

7. Докажите, что следующая задача алгоритмически разрешима. Для двух детерминированных МП-автоматов M_1 и M_2 определить $L(M_1) \stackrel{?}{=} L(M_2)$.