Теория вычислений **Домашнее задание 1 (1/2)**

Недели 1-2. Регулярные языки и конечные автоматы

Если в задаче не указан алфавит, то языки в задаче определены над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Запишите регулярное выражение для языка L, который содержит все слова, в которых есть как буква a, так и буква b. Должно быть доказано, что построенное РВ действительно описывает L.

2. Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:

- $\varepsilon, b, bb \in L$;
- вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
- никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

а) Докажите или опровергните, что $L = T$.

б) Постройте конечный автомат, распознающий T. Докажите, что построенный автомат распознаёт язык T.

Определение. Для языка $L \subseteq \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}^* = \Sigma_n^*$ и языков $L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, \ldots, L_{\sigma_n} \subseteq \Sigma_n^*$, подстановкой в L языков $L_{\sigma_1}, \ldots, L_{\sigma_n}$ назовём язык L', такой что для всех слов $w = w[1] \ldots w[n], w[i] \in \Sigma$, из языка L справедливо $L_{w[1]} L_{w[2]} \ldots L_{w[n]} \subseteq L'$:

$$L' = \bigcup_{w \in L} L_{w[1]} L_{w[2]} \ldots L_{w[n]}.$$

3. Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции подстановки.

4. Являются ли следующие языки регулярными? Ответ обосновать и привести доказательство.

а) $L_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^* a^n b^n \Sigma^*$; **б)** $L_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^* a^n b^n$; **в)** $L_3 = \{a^k x \mid k \leqslant |x|, x \in \Sigma^*\}$.

5. Приведите обоснованные ответы на вопросы.

а) Пусть R регулярный язык. Верно ли, что если $F \cap R \in \mathsf{REG}$ и $F \cap \bar{R} \in \mathsf{REG}$, то и $F \in \mathsf{REG}$?

б) Пусть L и T нерегулярные языки. Может ли язык $L \cdot T$ оказаться регулярным?

в) Пусть R_1 и R_2 регулярные выражения. Разрешима ли проверка их эквивалентности: $L(R_1) \stackrel{?}{=} L(R_2)$?