Задание 1
Регулярные языки и автоматы

Литература:

1. *Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д.*
   Введение в теорию автоматов, языков и вычислений.
   М.: Вильямс, 2002.

2. *Ахо А., Ульман Д.*
   Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции
   М.: Мир, 1978. Гл. 0, 2.

3. *Серебряков В.А., Галочкин М.П., Гончар Д.Р., Фуругян М.Г.*
   Теория и реализация языков программирования.
   М.: МЗ-пресс, 2006.

Ключевые слова [1]:*принцип мат. индукции, язык, регулярные выражения, конкатенация, объединение, итерация, конечные автоматы (КА), детерминированные и недетерминированные КА, регулярные языки.*

1 TEX

В этом году все задания принимаются только в формате TEX. Во-первых, через пару лет вам уже предстоит написание диплома и большинство дипломов так или иначе связаны с математикой, и уж точно в подавляющем большинстве из них присутствуют формулы. TEX– довольно гибкий инструмент для работы с математическими текстами, он является стандартом для публикаций в крупных журналах, не зависит от платформы и с ним довольно удобно работать. Даже в переписках в сети, уже принято записывать математические формулы в стиле теха и большинство профильных сайтов поддерживают конвертацию на лету из теха в формулы. Я буду предоставлять теховские исходники ко всем заданиям. Во-вторых, в этом году я планирую частично автоматизировать процесс приёма задания, поэтому, если планы сбудутся, то с

[1] минимальный необходимый объём понятий и навыков по этому разделу)

определённого момента сдавать задания в техе придётся по техническим причинам.

В качестве литературы по теху, я рекомендую книгу Львовского и статью с набором примеров Воронцова и wiki-учебник. Так же я нашёл видеоуроки, возможно они окажутся полезны.

Техом пользуется столько людей, что практически все потребности, которые возникают в процессе написания научных текстов, уже удовлетворены. Например, для построения графов автоматов есть множество пакетов. Я предпочитаю пакет *tikz*. Документация к этому пакету находится здесь.

В качестве редактора, я рекомендую использовать Texmaker. Это довольно удобный кроссплатформенный редактор.

2 О заданиях

Задания сдаются еженедельно, сдать задание надо до 22:59 четверга. Исходники теха и pdf с решением задания нужно присылать по адресу homework@rubtsov.su, если на сайте не появятся иные указания, для писем по другому поводу стоит использовать адрес alex@rubtsov.su. В самом задании обязательно **укажите фамилию, имя и номер группы**.

Задачи делятся на следующие категории: предбазовые, базовые, усиленные и дополнительные. Если вы не можете решить задачи предбазового уровня, то скорее всего вам стоит ещё раз разобраться с материалом. Сдавать эти задачи крайне желательно, благо они не большие по объёму, чтобы в случае критической ошибки я мог дать обратную связь. Задачи базового уровня – это обязательные задачи. Они не представляют особой трудности, но их уже необходимо сдавать в обязательном порядке. Усиленные задачи – это задачи в рамках курса и близкие к курсу, которые крайне желательно решать, если вы хотите автомат: успешное решение этих задач облегчит получение автомата и тем более сдачу задания.

Каждую неделю будут проводиться контрольные на 10-15 минут. Формат – openbook: вы можете пользоваться любой литературой, но *исключительно в бумажном виде*! Оценки за контрольные 0 и от 3 до 7. Без дополнительного общения, я готов в качестве автомата выставить среднюю оценку за контрольные, если у вас нет штрафных очков. Но обычно, те кто не имеют штрафных очков желают повысить оценку, поэтому среднюю оценку по контрольным следует рассматривать как оценку с которой начинается разговор. Автомат можно получить только если промежуточные общие контрольные для всего курса написаны не на два.

За несданные задания и плохо написанные контрольные начисляются штрафные очки, которые на очных сдачах преобразуются в дополнительные задачи.

Не сданное в срок задание или не написанную в срок семинарскую контрольную нельзя пересдать потом, вне зависимости от причины. Все набранные долги можно будет закрыть на очной сдаче, поэтому дополнительные меры для увеличения мировой справедливости применяться не будут.

3 Теоретико-множественное отступление

Для полноценного прохождения данного курса, вы должны помнить азы теории множеств. Вы должны знать что такое множество, пустое множество, элемент множества, основные операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, исключение. Однако, как показывает практика, обязательно найдутся люди, которые не помнят что такое декартово (прямое) произведение.

Определение 1. Декартовым произведением двух множеств X и Y называют множество $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

Также нередко забывают, что множество всех подмножеств множества X, обозначают 2^X.

Восполнить пробелы в теории множеств и дискретном анализе, а также узнать много нового и интересного можно из книги Н.К. Верещагина и А. Шеня *Лекции по математической логике и теории алгоритмов.* Эта книга, а также много других интересных и полезных книг, находятся в свободном доступе по адресу `http://www.mccme.ru/free-books/`.

4 Регулярные языки и конечные автоматы

Под *алфавитом* понимается конечное множество. Мы будем обозначать алфавиты заглавными греческими буквами, такими как Σ, Γ. Обычно мы будем использовать двухбуквенные алфавиты $\Sigma = \{a, b\}$ или

$\Sigma = \{0, 1\}$. Множества мы будем обозначать заглавными буквами, а их элементы строчными.

Для *букв* – элементов алфавита – определена операция *конкатенации*: $a \cdot b = ab$. *Слово* $w = w_1 w_2 \dots w_n$ – конкатенация букв. Длину слова w, мы будем обозначать $|w|$. Для слова $w = w_1 w_2 \dots w_n$, длина $|w|$ равна n, i-ый символ слова мы будем обозначать $w[i] = w_i$, подслово $w_i w_{i+1} \dots w_j$ будем обозначать $w[i, j]$. Мы не будем различать слова длины 1 и буквы, а также одноэлементные множества слов и слова. Пустое слово мы будем обозначать ε. Пустое слово обладает следующими свойствами: Для любого слова w, $\varepsilon \cdot w = w \cdot \varepsilon = w$, $|\varepsilon| = 0$. Для множеств слов определены следующие операции:

- Конкатенация: $X \cdot Y = \{x \cdot y \mid x \in X,\ y \in Y\}$.
- Возведение в степень: $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots X}_{n}$
- Объединение: $X|Y = X + Y = X \cup Y = \{w \mid w \in X \text{ или } w \in Y\}$.
- Итерация[2] $X^* = \varepsilon + X + X^2 + X^3 + \dots X^n + \dots$

В первой части курса мы будем изучать класс регулярных языков REG. Регулярные языки определяются следующим образом:

- $\emptyset \in \mathsf{REG}$.
- $\forall \sigma \in \Sigma :\ \{\sigma\} \in \mathsf{REG}$.
- $\forall X, Y \in \mathsf{REG}\ :\ X \cdot Y,\ X|Y,\ X^* \in \mathsf{REG}$.
- Больше нет регулярных языков.

Так, множество всех слов над алфавитом Σ обозначают Σ^*.

Запись регулярных языков с использованием скобок и определённых выше операций, называют *регулярным выражением*. Сами по себе скобки являются разделителем и не несут смысловой нагрузки: Регулярное выражение (a) задаёт язык $\{a\}$, $(a|b) = \{a, b\}$, $(a|b)^* = \{a, b\}^* = \Sigma^*$.

Упражнение 1. Показать, что $\varepsilon \in \mathsf{REG}$.

[2]Эта операция также носит название звёздочка Клини, в честь выдающегося математика Стивена Клини.

В теории формальных языков, каждому классу языков соответствует модель вычислений, которая распознаёт данный класс языков. Для класса регулярных языков такой моделью является *Конечный Автомат* (КА).

Определение 2. Конечный автомат $\mathcal{A}$ – это устройство, описываемое набором $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, где

- Q – конечное множество состояний автомата;
- Σ – алфавит, слова над которым обрабатывает автомат;
- q_0 – начальное состояние автомата;
- $\delta \ : Q \times \Sigma \to 2^Q$ – функция переходов;
- $F \subset Q$ – множество принимающих состояний.

Автомат является *детерминированным* (ДКА), если функция переходов определена однозначно, то есть для каждого состояния q и для каждого символа σ, существует не больше одного состояния $q' \in \delta(q, \sigma)$. В противном случае, автомат является *недетерминированным* (НКА).

На вход автомата подаётся слово $w = w_1 \dots w_n$. Автомат обрабатывает слово слева направо по тактам.

В детерминированном случае, за такт работы автомат находится в состоянии q, считывает символ σ и вычисляет функцию перехода $\delta(q, \sigma)$. Если $\delta(q, \sigma) = q'$, то автомат переходит в состояние q', если же $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, то автомат прекращает работу.

В недетерминированном случае, за такт работы, автомат *недетерминированно выбирает состояние* q' из множества $\delta(q, \sigma)$ и переходит в состоянии q'. В случае, если $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, автомат прекращает работу. Под недетерминированном выбором, мы понимаем, следующую ситуацию.

Слово *принимается автоматом*, если после обработки слова, автомат оказался в принимающем состоянии. Недетерминированный автомат *всегда* оказывается в принимающем, состоянии, если он может в него попасть. Таким образом, детерминированный автомат принимает слово, если после обработки слова он оказался в принимающем состоянии, а недетерминированный автомат принимает слово, если существует такая последовательность выборов состояний, что после обработки слова он оказывается в принимающем состоянии.

Назовём *конфигурацией* пару $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$. На множестве конфигураций введём соответствующее тактам работы автомата бинарное отношение $\vdash$: для всех $q' \in \delta(q, a)$ и для всех $w \in \Sigma^*$ $(q, aw) \vdash (q', w)$. Рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\vdash$ обозначим $\vdash^*$. Таким образом, автомат принимает слово, если существует такая цепочка конфигураций

$$(q_0, w_1 w[2, n]) \vdash (q_1', w[2, n]), (q_1', w_2 w[3, n]) \vdash (q_2', w[3, n]), \ldots, (q_{n-1}', w_n) \vdash (q_n', \varepsilon),$$

что $q_n' \in F$. Или в терминах транзитивного замыкания $\exists q_n' : (q_0, w) \vdash^* (q_n', \varepsilon)$.

Множество всех слов, принимаемых автоматом $\mathcal{A}$ будем обозначать $L(\mathcal{A})$. Автомат $\mathcal{A}$ *принимает* язык L, если $\forall w \in L : w \in L(\mathcal{A})$, другими словами $L \subseteq L(\mathcal{A})$. Если при этом, $L(\mathcal{A}) \subseteq L$, то будем говорить, что автомат $\mathcal{A}$ *распознаёт* язык L. Здесь есть тонкая лингвистическая разница, слова “принимает” и “распознаёт”, конечно схожи, но за ними стоят разные определения.

5 О решении задач

Я хочу отметить, что под *решением задачи* понимается не получение конечного ответа без пояснений, а последовательность *обоснованных* действий, приводящих к правильному ответу. Все действия и построения должны быть обоснованны *всегда*. Часто я буду акцентировать в условии внимание на том, что именно нужно доказать, но это не означает, что если в задаче нет фразы в духе «доказать, что А = В», то можно писать не подкреплённый доводами поток сознания.

Не обязательно решить все задачи, поэтому если не получается что-то решить самостоятельно, не надо это судорожно списывать. Лучше решить то, что получается. Не страшно не решить – страшно попасться на списывании. Я буду кластеризовать работы по глупостям. Это не означает, что задачи нельзя обсуждать друг с другом. Если кто-то рассказал вам идею решения и вы думаете, что её поняли и решили записать, то укажите ссылку на автора идеи.

6 Задачи предбазового уровня

Задача 1.

1. $\{a, aa\} \cdot \{b, bb\} = ?$
2. $\{a, aa\} + \{b, bb\} = ?$
3. $\{a, aa\} \times \{b, bb\} = ?$
4. $((aa|b)^*(a|bb)^*)^* = ?$
5. $\{a^{3n} |\, n > 0\} \cap \{a^{5n+1} | n \geqslant 0\}^* = ?$
6. $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = ?$

7 Задачи базового уровня

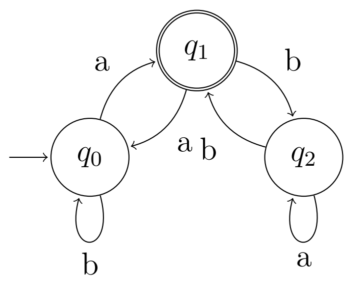
Если в задаче явно не указан алфавит, но в тексте упомянуты символы a, b $(0, 1)$, то алфавит в этой задаче состоит из символов a, b $(0, 1)$.

Задача 2. Построить регулярное выражение для языка из слов, содержащих в качестве подслова ровно одно слово ab.

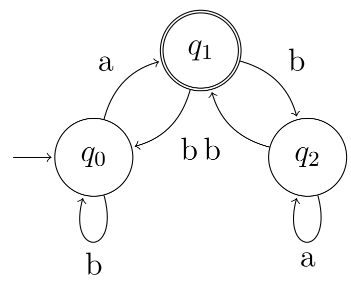
Задача 3. Построить РВ R для языка всех слов чётной длины L. Доказать, что язык порождённый регулярным выражением R совпадает с языком L.

Задача 4. Автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы диаграммами.

Автомат $\mathcal{A}$:



Автомат $\mathcal{B}$:



Для каждого автомата ответьте на следующие вопросы (1-2):

1. Автомат задан через граф переходов. Запишите определение автомата в виде $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Опишите элементы каждого множества

2. Является ли автомат детерминированным?

3. Опишите последовательность конфигураций автомата $\mathcal{A}$ при обработке слова $w = aababab$. Верно ли, что $w \in L(\mathcal{A})$?

4. Принимает ли автомат $\mathcal{B}$ слово $v = abbba$?

5. Укажите по одному слову, принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$ и по одному слову, не принадлежащее $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$. Все 4 слова должны быть различными.

Задача 5. Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:
(*1*) $\varepsilon, b, bb \in L$;
(*2*) вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
(*3*) никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

1. Докажите или опровергните, что $L = T$. Если равенство неверно, то нужно явно указать слово, принадлежащее одному языку и не принадлежащее другому. Если равенство верно, то нужно провести доказательство ПО ИНДУКЦИИ:
1) $L \subseteq T$;
2) $T \subseteq L$.

2. Постройте конечный автомат, распознающий T. Докажите (по индукции), что построенный автомат распознаёт язык T.

8 Благодарности

Я хотел бы поблагодарить Сергея Тарасова за предоставление своих материалов и задач, часть из которых я использовал при подготовке этих заданий. Также я хочу поблагодарить Дмитрия Гончара за исправление опечаток и рекомендации по правке предыдущей версии этого задания.