

# Задание 10

## Замкнутость КС-языков

**Ключевые слова**<sup>1</sup>: язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, метод математической индукции.

### 1 Лемма о накачке

Одна из целей изучения леммы о накачке для регулярных языков – упрощение понимания леммы о накачке для КС-языков, где она уже жизненно необходима. Сформулируем лемму.

**Лемма 1.** Для любого КС-языка  $L$  существует константа  $p$ , такая что для любого слова  $w$  из языка  $L$ , такого что  $|w| \geq p$  существует разбиение слова  $w = xuyvz$ , причём

- $|uyv| \leq p$
- $|uv| \geq 1$
- $\forall i \geq 0 : w_i = xu^i y v^i z \in L$

**Пример 1.** Язык  $L = a^n b^n c^n$  не является КС-языком.

*Доказательство.* Предположим, что  $L \in \text{CFL}$ , тогда для некоторого числа  $p$  выполнена лемма о накачке. Рассмотрим слово  $w = a^p b^p c^p$  (заметим, что число  $p$  является параметром, а не каким-то конкретным числом). Тогда подслово  $uyv$  из разбиения слова  $w$ , существующего по лемме о накачке, либо состоит из одинаковых букв ( $a^l$  или  $b^l$  или  $c^l$ ) или имеет вид  $a^l b^r$  или  $b^l c^r$ . Три различные буквы подслово  $uyv$  содержать не может, поскольку его длина ограничена числом  $p$ . Но тогда  $uv$  – слово, в котором нет одной из трёх букв. Пусть это будет буква  $c$  для определённости. Взяв  $i = 0$ , получаем, что по лемме о накачке  $w_0 = a^{n-k} b^{n-m} c^n \in L$ , при этом  $k + m \geq 1$ , откуда следует, что слово  $w_0$  не принадлежит языку  $L$ .  $\square$

---

<sup>1</sup>минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

**Упражнение 1.** Покажите, что КС-языки замкнуты относительно объединения.

**Упражнение 2.** Покажите, что КС-языки не замкнуты относительно пересечения.

**Упражнение 3.** Покажите, что КС-языки не замкнуты относительно дополнения.

**Задача 1.** Постройте КС-грамматику, порождающую язык  $\Sigma^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ .

**Задача 2.** Верно ли, что язык  $\{a^n b^m b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$  является КС-языком? В случае положительного ответа построить КС-грамматику или МПА-автомат для данного языка.

**Задача 3.** Пусть  $A, B \in \text{CFL}$ ,  $R \in \text{REG}$ . Верны ли следующие утверждения (для произвольных  $A, B, R$ ):

- 1)  $A \setminus R \in \text{CFL}$ ;      2)  $R \setminus A \in \text{CFL}$ ;      3)  $A^R \in \text{CFL}$ ?

**Задача 4.** Докажите, что язык  $\{wtw^R \mid |w| = |t|\} \subseteq \{a, b\}^*$  не является КС-языком.

**Задача 5.** Являются ли следующие языки над алфавитом  $\Sigma = \{a, b\}$  КС-языками? Регулярными языками?

1.  $L_x = \{xy \mid |x| < |y|, x \text{ содержит букву } b\}$ .

2.  $L_y = \{xy \mid |x| < |y|, y \text{ содержит букву } a\}$ .

**Задача 6.<sup>†</sup>** Докажите, что КС-языки замкнуты относительно операции подстановки. То есть, если  $L$  – КС-язык над алфавитом  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ , а  $L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, \dots, L_{\sigma_n}$  – КС-языки, над алфавитом  $\Delta$ , то язык

$$\bigcup_{w \in L} L_{w_1} \cdot L_{w_2} \cdot \dots \cdot L_{w_n}, \text{ где } w_i \in \Sigma$$

является КС-языком.