

Задание 7

Контекстно-свободные языки

Ключевые слова¹: язык, регулярный язык, регулярное выражение, уравнения с регулярными коэффициентами, контекстно-свободный язык, грамматика, метод математической индукции.

1 Задачи

Задача 1. Решите уравнения с регулярными коэффициентами. В каждом пункте нужно выполнить три задания:

- 1) найти частное решение;
- 2) найти решение, минимальное по включению;
- 3) найти все решения.

$$1. X = ((110)^* + 111^*)X.$$

$$2. X = (00 + 01 + 10 + 11)X + (0 + 1 + \varepsilon).$$

$$3. \begin{cases} Q_0 = 0Q_0 + 1Q_1 + \varepsilon, \\ Q_1 = 1Q_0 + 0Q_2, \\ Q_2 = 0Q_1 + 1Q_2. \end{cases}$$

Определение 1. Грамматика называется линейной, если в правые части правил вывода входит не более одного нетерминала.

Задача 2. Верно ли, что для любой линейной грамматики G , $L(G) \in \text{REG}$?

¹минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Задача 3*. Язык $L^=$ является языком всех слов с равным числом символов a и b . Покажите, что язык $L^=$ не порождается никакой линейной КСГ.

Задача 4. Верно ли, что если пересечение языков $L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ содержит язык $F = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$: $F \subseteq L_1 \cap L_2$, то хотя бы один из языков L_1 и L_2 является нерегулярным?

Определение 2. Палиндромами называют слова, которые одинаково читаются слева-направо и справа-налево, например, «ротор». Обозначим через PAL – язык палиндромов над двоичным алфавитом.

Задача 5. Постройте КС-грамматики для следующих языков:

1. $\{a, b\}^* \setminus \text{PAL}$.
2. $\{a, b, c\}^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.
- 3*. $\{w \mid w \neq ui, u \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b\}^*$.

Ещё раз напоминаю, что задачи, помеченные \dagger являются дополнительными, поэтому списывать их из книжек – бессмысленное увеличение энтропии.

Определение 3. Пусть $\Sigma_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. Для языка $L \subseteq \Sigma_n^*$ и языков $L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, \dots, L_{\sigma_n} \subseteq \Sigma_n^*$, подстановкой в L языков $L_{\sigma_1}, \dots, L_{\sigma_n}$ назовём язык L' , такой что для всех слов $w = w[1] \dots w[n]$ из языка L справедливо $L_{w[1]} L_{w[2]} \dots L_{w[n]} \subseteq L'$

Задача 6 † . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции подстановки.

Определение 4. Даны алфавиты Σ и Δ . Для языка $L \subseteq \Sigma \times \Delta$ определены операции проекции на Σ^* и Δ^* . Проекцией L на Σ^* называется язык $L_\Sigma = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Delta^* : (w, v) \in L\}$. Проекция L на Δ^* определяется аналогичным образом.

Задача 7 † . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции проекции.

Определение 5. Для языка $L_\Sigma \subseteq \Sigma^*$, Δ -цилиндром называется язык L , такой что $L = \{w \mid w = (u, v), u \in L_\Sigma, v \in \Delta^*\}$

Задача 8[†]. Показать, что Σ -проекция Δ -цилиндра L есть L . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции цилиндра.