Содержание

Программа курса

«Теория и реализация языков программирования»

1. Известные и перспективные направления эффективного применения теории формальных языков как математической дисциплины. Алфавиты, цепочки, языки и их представление. Формальное определение грамматики. Типы грамматик по Хомскому и их свойства. Связь машин Тьюринга и грамма-тик типа 0. Линейно-ограниченные автоматы и их связь с КЗ-грамматиками.

2. Лексический анализ. Регулярные языки (РЯ) и регулярные выражения (РВ). Конечные автоматы (КА). Детерминированные и недетерминированные КА (ДКА и НКА). Эквивалентность классов языков, определяемых КА, РВ и автоматными грамматиками (грамматики типа 3: леволинейные – ЛЛ, праволинейные – ПЛ). Свойства замкнутости РЯ. Лемма о накачке для РЯ. Теорема Майхилла–Нероуда и минимальные автоматы. Алгоритмы поиска подстрок и КА. Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта (КМП-алгоритм), реализация структуры данных «словарь», алгоритм Ахо-Корасик.

   Алгоритмы по теме КА

   - Построение ДКА по НКА.
   - Построение НКА по РВ.
   - Построение ДКА по РВ.
   - Построение РВ по НКА.
   - По РВ R проверить, что слово принадлежит $L(R)$.
   - Построить по языку L язык L^R.
   - Построение произведения (конкатенации) РЯ, дополнение РЯ, пересечение РЯ.
   - Построение минимального автомата по ДКА.

- КМП-алгоритм.
- Построение по НКА эквивалентных ЛЛ- и ПЛ-грамматик.
- Построение эквивалентного НКА по ЛЛ- и ПЛ-грамматике.
- Решение уравнений с регулярными коэффициентами.

3. Синтаксический анализ: КС-грамматики (КСГ). Преобразования КС-грамматик, приведённые грамматики. Канонические формы КС - грамматик (нормальная форма Хомского). Свойства замкнутости КС-языков (КСЯ), незамкнутость КСЯ относительно пересечения. Дерево вывода КСГ. Однозначность КС-грамматик. Однозначность праволинейной грамматики, построенной по ДКА. Лемма о накачке для КСЯ. Проверка принадлежности слова КСЯ КСГ (алгоритм Кока–Янгера–Касами). Сжатие строк на основе КС-грамматик (straight-line grammars): алгоритм Лемпеля–Зива–Велча.

4. Синтаксический анализ: автоматы с магазинной памятью (МА). Детерминированные и недетерминированные МА. Обобщенные МА и их эквивалентность стандартным МА. Эквивалентность МА, распознающих по конечному состоянию (F-МА) и по опустошению магазина (N-МА). Эквивалентность КСГ и МА. Однозначность КСГ, построенной по детерминированному N-МА (без доказательства).

Алгоритмы по теме КСГ и МА

- Удаление недостижимых и бесполезных символов в КСГ. Удаление циклов.
- Удаление левой рекурсии в КСГ.
- Приведение КСГ к нормальной форме Хомского и нормальной форме Грейбах.
- Проверка принадлежности слова КСГ (алгоритм Кока–Янгера–Касами).
- Преобразование N-МА $\to$ F-МА.
- Преобразование F-МА $\to$ N-МА.
- Преобразование КСГ в эквивалентный N-МА.
- Преобразование N-МА в эквивалентную КСГ (с доказательством корректности для N-МА с одним состоянием).

5. Дополнительные сведения из теории конечных автоматов. Минимизация числа состояний и эквивалентность детерминированного конечного автомата (ДКА).

6. Предсказывающий разбор сверху вниз. Алгоритм разбора сверху вниз. Функции FIRST и FOLLOW. Конструирование таблицы предсказывающего анализатора. LL(1)-грамматики. Удаление левой рекурсии. Левая факторизация. Рекурсивный спуск. LL(k)-грамматики. Разбор снизу вверх типа сдвиг-свёртка. Основа. LR(k)-анализаторы. Конструирование LR(1)-таблицы. LR(1)-грамматики. Варианты LR-анализаторов. LR(k)-грамматики.

7. Элементы теории перевода. Синтаксически управляемый перевод. Атрибутные грамматики.

Список литературы

[1] Ахо А., Сети Р., Ульман Дж. Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты. М.-СПб.-Киев: Вильямс, 2001.

[2] Мартыненко Б.К. Языки и трансляции. СПб.: СПбГУ, 2004. Доступно по ссылке http://trpl7.ru/t-books/Martin/Martinenko_FLT_Cont.htm.

[3] Серебряков В. А., Галочкин М. П., Гончар Д. Р., Фуругян М. Г. Теория и реализация языков программирования: учеб. пос. М.: МЗ-Пресс, 2006. 352 с.

[4] Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2002.

[5] Ахо А., Лам М., Сети Р., Ульман Дж. Компиляторы. Принципы, технологии и инструментарий. М.-СПб.-Киев: Вильямс, 2011. 1184 с.

[6] Шень А. Х. Программирование: теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 2004. Доступно по ссылке https://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-progbook.pdf.

Задание

Задачи, выделенные в дополнительный раздел, а также задачи, помеченные звёздочкой, являются дополнительными и необязательными. Контрольные вопросы являются полноценными задачами, хотя и выделены в отдельные блоки. Решение всех задач должно быть обосновано. Отдельные указания по необходимости обоснования в некоторых задачах являются акцентированием и вовсе не означают, что в других задачах обоснование не требуется. Использование алгоритмов из курса (см. программу) считается обоснованием. При использовании алгоритма проверяющий должен иметь возможность проверить корректность протокола: решения в духе «автомат построен по алгоритму, но вот только ответ» не оцениваются.

Если в формулировке вопроса задачи используются обороты «верно ли, что» и «может ли быть», то в случае положительного ответа приведите доказательство, а в случае отрицательного – контрпример. Верное рассуждение без контрпримера оценивается вполовину задачи.

Всё вышесказанное относится ко всем письменным работам курса.

Ссылки на литературу указаны по библиографии в программе курса.

Регулярные языки

Задача 1. Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:

1. $\varepsilon, b, bb \in L$;
2. вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
3. никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

1. Докажите или опровергните, что $L = T$.[1]

2. Запишите язык T в виде регулярного выражения.

3. Постройте конечный автомат, принимающий T. Докажите (по индукции), что построенный автомат принимает язык T.

Задача 2. Верно ли, что

1) $\varepsilon \in \{a, aab, aba\}$?

2) $\varnothing \in \{a, aab, aba\}$?

[1] Если равенство неверно, то нужно явно указать слово, принадлежащее одному языку и не принадлежащее другому. Если равенство верно, то нужно провести доказательство по индукции в обе стороны: $L \subseteq T$ и $T \subseteq L$.

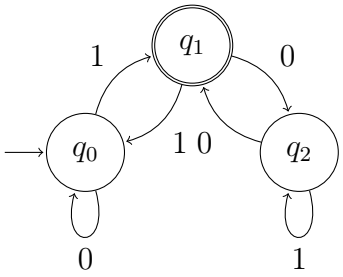
Задача 3.

1. Задайте множество $\{a^n \mid n > 0\} \times \{b^n \mid n \geqslant 0\}$ формулой, которая не использует символ $\times$.

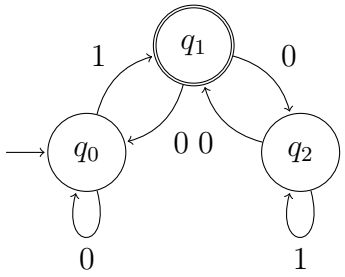
2. Опишите язык $\{a^{3n} \mid n > 0\} \cap \{a^{5n+1} \mid n \geqslant 0\}^*$ регулярным выражением.

Задача 4. Автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы диаграммами. Выполните следующие задания.

Автомат $\mathcal{A}$:



Автомат $\mathcal{B}$:



Для каждого автомата ответьте на следующие вопросы (1–2).

1. Автомат задан через граф переходов. Запишите определение автомата в виде $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Опишите элементы каждого множества.

2. Является ли автомат детерминированным?

Ответьте на вопросы.

3. Опишите последовательность конфигураций автомата $\mathcal{A}$ при обработке слова $w = 011001$. Верно ли, что $w \in L(\mathcal{A})$?

4. Принимает ли автомат $\mathcal{B}$ слово $v = 0101001$?

5. Укажите по одному слову, принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$, и по одному слову, не принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$. Все четыре слова должны быть различными.

Задача 5. Выполните следующие задания.

1. Построить ДКА, принимающий язык L, состоящий из всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат чётное число нулей и нечётное число единиц.

2. Построить эквивалентную леволинейную грамматику. Будет ли она однозначной?

3. Построить регулярное выражение для языка L^R.

Задача 6. Будут ли регулярными следующие языки?

1. $L = \{a^{2016n+5} \mid n = 0, 1, \} \cap \{a^{503k+29} \mid k = 401, 402, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$.

2. $L_2 = \{a^{200n^2+1} \mid n = 1000, 1001, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$.

3. Язык L_3 всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые представляют числа в двоичной записи, дающие остаток два при делении на три (слово читается со старших разрядов). Например, $001010 \notin L_3$ ($1010_2 = 10_{10} = 3{\times}3{+}1$), а $10001 \in L_3$ ($10001_2 = 17_{10} = 5 \times 3 + 2$).

Задача 7. Постройте НКА, принимающий язык $L_3 = \{$ Множество слов в алфавите $\{a, b\}$, у которых третий от конца[2] символ равен «a»$\}$. Затем, используя алгоритм, постройте соответствующий полный ДКА.

Задача 8. Порождает ли регулярное выражение $(ab)^*(ba)^*$ тот же язык, что распознаёт ДКА $M = (\{A, B, C, D\},\ \{a, b\},\ \delta,\ A,\ \{A, D, E\})$, где функция переходов задана следующим образом:

$$\delta(A, a) = B,\ \delta(A, b) = C,\ \delta(B, b) = D,\ \delta(C, a) = E,$$

$$\delta(D, a) = B,\ \delta(D, b) = C,\ \delta(E, b) = C.$$

[2]Последний символ слова равен первому символу с конца слова.

Задача 9. Покажите, что следующий язык удовлетворяет лемме о разрастании для регулярных языков, но сам регулярным не является:

$$L = \{ab^{2^i} \mid i \geqslant 0\} \cup \{b^j \mid j \geqslant 0\} \cup \{a^m b^n \mid m > 1, n \geqslant 0\}.$$

Задача 10. Решите уравнения с регулярными коэффициентами. В каждом пункте нужно выполнить три задания:

1) найти частное решение;
2) найти решение, минимальное по включению;
3) найти все решения.

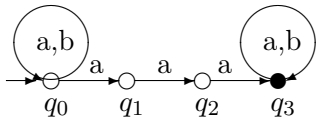
1. $X = ((110)^* + 111^*)X.$

2. $X = (00 + 01 + 10 + 11)X + (0 + 1 + \varepsilon).$

3. $$\begin{cases} Q_0 &= 0Q_0 + 1Q_1 + \varepsilon, \\ Q_1 &= 1Q_0 + 0Q_2, \\ Q_2 &= 0Q_1 + 1Q_2. \end{cases}$$

Задача 11. Автомат $\mathcal{A}_1$ задан диаграммой. Выполните следующие задания. Достаточно выполнить хотя бы один из пунктов 2 или 3.

$\mathcal{A}_1$:



1. По диаграмме $\mathcal{A}_1$ постройте праволинейную грамматику G.

2. Запишите определяющую систему уравнений для G. Найдите её наименьшую неподвижную точку и вычислите регулярное выражение α_1 для $L(\mathcal{A}_1)$.

3. Определите регулярное выражение α_2 для $L(\mathcal{A}_1)$ с помощью индуктивного вычисления множеств R_{ij}^k.

4. Выберите какое-нибудь регулярное выражение α_1 или α_2 и постройте НКА $\mathcal{A}_2$ по регулярному выражению.

5. Выберите какой-нибудь НКА $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$ и постройте ДКА D_1.

6. Выберите какое-нибудь регулярное выражение α_1 или α_2 и постройте ДКА D_2.

7. Выберите какой-нибудь ДКА D_1 или D_2, дополните его, если нужно, до полного и постройте минимальный полный ДКА $\min \mathcal{A}$ для L. Для каждой пары состояний укажите соответствующие различающие их цепочки.

8*. По алгоритму КМП (Кнута–Мориса–Пратта) постройте автомат для L и сравните его с $\min \mathcal{A}$.

Контрольные вопросы

Несмотря на название раздела, все решения задач должны быть строго обоснованы.

Задача 12. Верно ли, что если пересечение языков $L_1,\ L_2 \subseteq \{a,b\}^*$ содержит язык $F = \{a^n b^n \,|\, n \geqslant 1\} : F \subseteq L_1 \cap L_2$, то хотя бы один из языков L_1 и L_2 является нерегулярным?

Задача 13. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – бесконечное семейство регулярных языков.

1. Верно ли, что язык $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_i$ является регулярным языком?

2. Верно ли, что язык $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_i$ является регулярным языком?

Задача 14. Язык L_1 объединили с конечным языком R и получили язык L ($L = L_1 \cup R$). Язык L оказался регулярным. Верно ли, что язык L_1 мог быть нерегулярным?

Задача 15. Язык задан контекстно-зависимой грамматикой, которая не является контекстно-свободной. Может ли он быть регулярным?

Приложение конечных автоматов для поиска подстрок

Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта

Одно из простых и естественных применений регулярных выражений – поиск в тексте (слове) t вхождения некоторого слова w. В терминах регулярных выражений задача состоит в проверке принадлежности слова t языку, порождаемому РВ $\Sigma^* w \Sigma^*$. Однако сходу придумать алгоритм, который выполняет эту проверку за линейное время, не очень просто. Таким алгоритмом является алгоритм Кнута–Морриса–Пратта (КМП), и здесь мы опишем его на языке автоматов. С самим алгоритмом можно познакомиться, например, в 10-й главе книги [6].

Для того чтобы описать КМП-алгоритм, нам потребуется сначала ввести понятие префикс-функции.

Определение 1. Назовём *префикс-функцией* функцию $l : \Sigma^* \to \Sigma^*$, которая возвращает самый длинный собственный[3] префикс слова w, являющийся одновременно его суффиксом.

Пример 1. Приведём пример вычисления префикс-функции.

$$l(a^{n+1}) = a^n \qquad l(aabaaabaa) = aabaa$$
$$l(ababa) = aba \qquad l(aabaa) = aa$$
$$l(abb) = \varepsilon$$

У префикс-функции есть важное свойство – все собственные префиксы слова w, которые являются его суффиксами, лежат в последовательности $l(w), l(l(w)), \ldots$

Зафиксируем слово w. Обозначим через $w[i, j]$ подслово $w_i w_{i+1} \ldots w_j$ слова $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, здесь всюду $w_k \in \Sigma$. Для удобства будем считать,

[3] То есть префикс, не совпадающий со всем словом w.

что $w[0,0] = \varepsilon$, а $w[0,k] = w[1,k]$ при $k > 0$. Определим автомат, который будем называть *автоматом Кнута–Морриса–Пратта* или КМП-автоматом для слова w.

Определение 2. КМП-автоматом $\mathcal{A}_w$ для слова $w \in \Sigma^*$ длины n называется автомат, который задан набором $(Q,\ \Sigma,\ q_0,\ \delta,\ F)$, где

- $Q = \{\ w[0,0],\ w[0,1],\ w[0,2], \ldots,\ w[0,n]\ \}$;
- $q_0 = w[0,0]$;
- $\delta(w[0,k], a) = \begin{cases} w[0,k+1] & \text{при } w[0,k+1] = w[0,k]a \text{ и } k < n; \\ l(w[0,k]a) & \text{при } w[0,k+1] \neq w[0,k]a \text{ и } k < n; \\ w[0,n] & \text{при } k = n. \end{cases}$
- $F = \{w[0,n]\}$.

Замечание 1. *В качестве множества состояний КМП-автомата выступает множество слов, поэтому применение для состояний операций со словами, например «$w[0,k+1] = w[0,k]a$», при определении функции переходов корректно и осмысленно.*

Задача 16. Постройте КМП-автомат для слова *abababb* и продемонстрируйте его работу на слове *abababababb*.

Структура данных «Словарь»

Под словарём понимают структуру данных, с помощью которой можно проверять вхождение слова в множество. У этой структуры данных есть следующие операции:

- **in**: добавить слово x в словарь;
- **test**: проверить, входит ли слово x в словарь;
- **out**: удалить слово x из словаря.

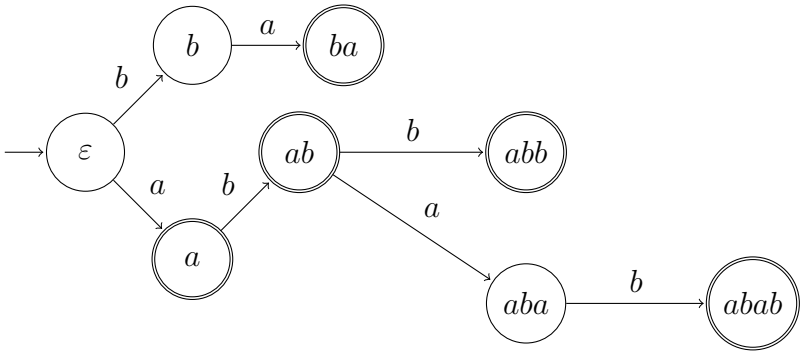


Рис. 1. ДКА $\mathcal{A}$ реализует словарь

Эту структуру данных можно реализовать с помощью автомата. На рис. 1 показан пример словаря с содержимым $S = \{a, ba, ab, abb, abab\}$, который реализован через ДКА. ДКА $\mathcal{A}$ принимает слово x тогда и только тогда, когда $x \in S$.

Задача 17. Постройте алгоритмы, реализующие операции **in** и **out** для ДКА, реализующих словарь. В результате этих операций должен получиться ДКА, который реализует словарь с соответственно изменившимся содержимым.

Задача 18. Постройте алгоритм, который получает на вход конечное множество слов S и возвращает ДКА, реализующий словарь с содержимым S. Используйте при построении только известные из курса алгоритмы для регулярных множеств (выражений) и конечных автоматов.

Замечание. В задачах, в которых требуется построить алгоритм, необходимо доказательство его корректности.

Задача 19. Постройте ДКА для словаря $\{ac, acb, b, ba, c, cbb\}$. Добавьте в полученный словарь слово ab и удалите слово ac.

Алгоритм Ахо-Корасик

Алгоритм Ахо-Корасик позволяет проверять вхождение в текст t слов из заранее построенного словаря. Причём алгоритм находит все вхождения за линейное время!

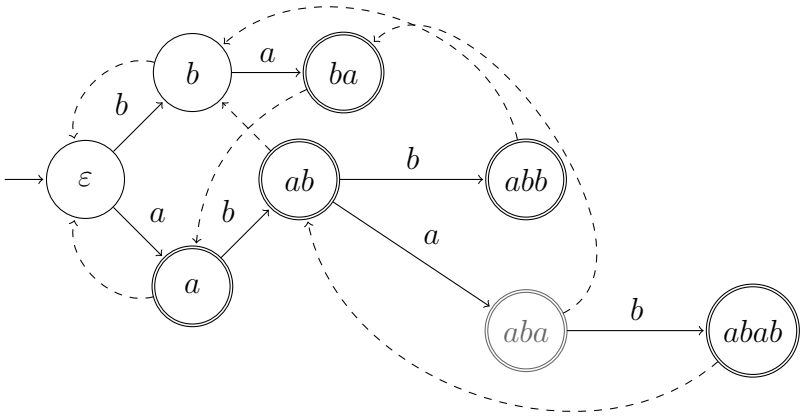


Рис. 2. Автомат Ахо-Корасик

Автомат для алгоритма Ахо-Корасик (рис. 2) построен следующим образом. Он содержит все состояния и переходы, что и соответсвующий автомат для словаря (рис. 1), но помимо этого к принимающим состояниям относятся те состояния, некоторый суффикс которых является принимающим: состояние aba выделено серым, поскольку слово aba не лежит в словаре, однако в словаре лежит слово ba. Пунктирные переходы используются в случае сбоя: переход из состояния u (состояние = некоторое слово) по пунктирной линии осуществляется в случае сбоя: если из u нет перехода по a, то автомат переходит в состояние s, в которое ведёт пунктирная стрелка, и пытается перейти по a из s и т.д. Переход из u в s добавляется согласно следующему правилу. Слово s должно быть самым длинным суффиксом слова u ($u = ps$), который является состоянием автомата Ахо-Корасик. Такие переходы называют *суффиксными ссылками*.

Так, автомат Ахо-Корасик (рис. 2), по сути, является ДКА (рис. 3), граф которого получается из автомата Ахо-Корасик добавлением явных переходов, которые были заданы суффиксными ссылками. ДКА (и соответсвенно автомат Ахо-Корасик) оказывается в принимающем состоянии тогда и только тогда, когда в тексте на входе автомата встретилось слово из словаря (возможно несколько одновременно). Заметим, что коли-

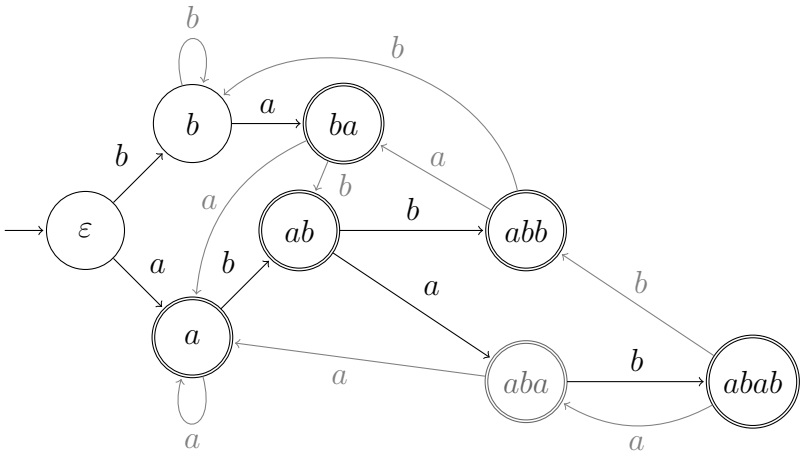


Рис. 3. ДКА Ахо-Корасик

чество одновременно встретившихся подслов текста из словаря зависит только от состояния автомата.

Непосредственное построение ДКА Ахо-Корасик, как правило, неэффективно для приложений – суффиксные ссылки позволяют существенно сократить таблицу переходов и уменьшить тем самым длину описания автомата.

Задача 20. Постройте для словаря $S = \{ac, acb, b, ba, c, cbb\}$ (который вы строили в предыдущем разделе) автомат Ахо-Корасик. Посчитайте с его помощью количество различных вхождений слов из словаря S в подслово $acbacbb$.

Контекстно-свободные языки

Задача 21. Язык $L^=$ является языком всех слов с равным числом символов a и b.

1. Покажите индукцией[1] по длине слова, что КС-грамматика с правилами $S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$ порождает язык $L^=$.

2*. Грамматика называется линейной, если в правые части правил вывода входит не более одного нетерминала. Покажите, что язык $L^=$ не порождается никакой линейной КСГ.

Задача 22. Палиндромами называют слова, которые одинаково читаются слева направо и справа налево, например, «ротор».

1. Покажите, что язык палиндромов в произвольном алфавите является КС-языком.

2. Покажите, что дополнительный язык (язык всех непалиндромов) также является КС-языком.

3. Покажите, что дополнительный язык к языку $U = \{a^n b^n c^n, n = 0, 1, \ldots\}$ является КС-языком.[2]

Задача 23. Являются ли следующие языки КС-языками:

1. $SQ = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

[1] Другие доказательства, кроме индукции, не принимаются.

[2] Так как сам язык U не является КС-языком, то это означает, что в отличие от регулярных языков множество КС-языков не замкнуто относительно дополнения.

2. $\Sigma^* \setminus SQ$.

3. $\{a^{3^n} \mid n > 0\}$?

Задача 24. Выполните следующие задания.

1. Постройте магазинный автомат (МА), распознающий язык $L^=$ из задачи **16**.

2*. Постройте детерминированный МА, распознающий тот же язык, и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 25. Язык Дика с двумя типами скобок D_2 порождается грамматикой

$$S \to SS \mid (S) \mid [S] \mid \varepsilon.$$

1. Постройте недетерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2.

2. Постройте детерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2, и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 26. Для языка

$$L = \{w \mid w = xcy; x, y \in \{a, b\}^*; |x| = |y|\}$$

1) постройте КС-грамматику G, порождающую язык L;

2) постройте недетерминированный МА, эквивалентный этой грамматике;

3) продемонстрируйте работу построенного МА на слове $acab$ (проанализируйте все варианты поведения).

Задача 27. Заданы грамматика $G = \{ \{ A, B, C, D, E, F, S \}, \{a, b\}, \{S \to AB \mid C, A \to aE \mid a, E \to aE \mid \varepsilon, B \to bB \mid Bb \mid b, C \to CD, F \to ab, D \to aba\}, S\}$ и магазинный автомат $M = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{ S, a, b, A, B \}, \{ \delta(q_0, \varepsilon, S) = \{(q_0, AB)\}, \delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_0, aA), (q_0, a)\},$

$\delta(q_0, \varepsilon,\ B) = \{(q_0, bB), (q_0, b)\}, \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\},\ \delta(q_0, b, b) = \{(q_0, \varepsilon)\},\ q_0,\ S\}$, принимающий слова опустошением магазина.

1. Эквивалентны ли грамматика G и N-автомат[3] M?

2. Однозначна ли грамматика G? Если нет, то постройте эквивалентную ей однозначную грамматику.

3. Является ли автомат M детерминированным? Если нет, постройте эквивалентный ему детерминированный МА.

Задача 28. Определим языки $L_1 = \Sigma^* aab\Sigma^*$, где $\Sigma = \{a, b\}$, и

$$L = \{w \mid w \in \overline{L_1},\ |w|_a \geqslant |w|_b\}.$$

1. Является ли дополнение языка L КС-языком?

2. Является ли дополнение языка L регулярным языком?

Задача 29. Язык L задан КС-грамматикой с правилами:

$$S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid a.$$

1. Является ли L регулярным языком?

2. Является ли дополнение L регулярным языком?

3. Является ли L КС-языком?

4. Является ли дополнение L КС-языком?

Задача 30. Язык L задан КС-грамматикой с правилами:

$$S \to aSb \mid A \mid B \mid \varepsilon, \quad A \to aAa \mid \varepsilon, \quad B \to bBb \mid \varepsilon.$$

1. Является ли L регулярным языком?

2. Является ли дополнение L регулярным языком?

3. Является ли L КС-языком?

4. Является ли дополнение L КС-языком?

[3] Мы называем N-автоматом МП-автомат, допускающий по пустому стеку, а F-автоматом — МП-автомат, допускающий по принимающему состоянию.

Контрольные вопросы

Задача 31. КС-грамматика называется *левооднозначной*, если каждое слово порождаемого ею языка имеет единственный левый вывод. Аналогично определяется *правооднозначная грамматика*. Можно ли построить пример левооднозначной, но не правооднозначной КС-грамматики?

Задача 32. Пусть L_1 – КС язык, не являющийся регулярным, а L_2 – не КС-язык. Может ли язык L_2L_1 быть регулярным языком? При положительном ответе привести пример.

Приложение КС-грамматик для сжатия данных

Некоторые алгоритмы сжатия строк можно описать в терминах КС-грамматик. Мы рассмотрим два таких алгоритма. Первый из них носит название «Straight-line program» (SLP) и состоит в следующем. Слово w описывают с помощью КС-грамматики G_w, которая порождает единственное слово: $L(G_w) = w$. Грамматику G_w называют «Straight-line grammar» (SLG); этим же термином иногда называют и описываемый нами частный случай метода сжатия SLP: в роли программ выступают КС-грамматики.

Пример 2. Грамматика, описываемая правилами

$$S \to A_1A_1, \quad A_1 \to A_2A_2, \quad A_2 \to A_3A_3, \quad \ldots \quad A_{n-1} \to A_nA_n, \quad A_n \to a$$

порождает единственное слово a^{2^n}. Длина описания грамматики не превосходит cn, для некоторой константы $c > 0$, то есть имеет длину порядка логарифма от длины порождаемого слова, что является хорошим коэффициентом сжатия.

Задача 33. Постройте SLG G_n, порождающую слово

$$a^nba^{n-1}ba^{n-2}b \ldots ababa^2ba^3b \ldots a^nb.$$

Длина описания G_n должна быть $cn, c > 0$. В качестве решения можно построить SLG G_5.

Замечание 2. *Преимуществом описанного метода сжатия является возможность эффективной проверки сжатого слова на регулярные события без разархивации. То есть существует алгоритм, получающий на вход описание НКА $\mathcal{A}$ и SLP G_w и проверяющий непустоту пересечения $L(\mathcal{A}) \cap L(G_w)$ за полиномиальное время от длин описаний $\mathcal{A}$ и G_w, но не w.*

Задача 34*. Постройте описанный выше алгоритм и докажите его корректность.

Мы описали общий метод сжатия SLP, но не описали пока алгоритма сжатия строк в грамматики. Таких алгоритмов существует несколько, одним из популярных алгоритмов сжатия такого типа является алгоритм Лемпеля–Зива–Велча (Lempel–Ziv–Welch, LZW). Опишем работу этого алгоритма на примере сжатия конкретной строки: *aababbbbaabaabab*.

Таблица 1

Разбиение строки алгоритмом LZW

a	ab	abb	b	ba	aba	$abab$
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7

Таблица 1 представляет собой словарь. Она устанавливает взаимно однозначное соответствие между нетерминалами и словами: слово w_i в построенной в итоге грамматике будет выводимо из A_i и только из A_i (но не обязательно за один шаг вывода). Опишем алгоритм заполнения таблицы-словаря.

1. В начале работы словарь пуст, слово u – необработанный суффикс слова w – совпадает с w, $i = 1$.

2. Алгоритм ищет максимальный префикс x необработанной части входа u, который был добавлен в словарь.

3. Если $u = xav, a \in \Sigma$, то алгоритм добавляет в словарь слово $w_i = xa$, удаляет префикс xa из u, увеличивает i на 1 и переходит к предыдущему шагу, если $u \neq \varepsilon$. Если же $u = \varepsilon$, алгоритм заканчивает работу.

4. Если $u = x$ и x уже соответствует некоторому нетерминалу A_j, то алгоритм добавляет в грамматику правило $A_i \to A_j$ и завершает работу. Обратим внимание, что x на этом шаге является суффиксом w.

Так, первая буква слова w всегда будет приписана нетерминалу A_1; далее в нашем примере за первой a идёт подслово ab, которое приписывается нетерминалу A_2, поскольку первая буква подслова a уже была приписана A_1; далее идёт подслово abb – подслово ab уже было приписано A_2 и т.д.

Нетрудно заметить, что искомая SLG имеет вид

$$S \to A_1 A_2 \dots A_7, \quad A_1 \to a, \quad A_2 \to A_1 b, \quad A_3 \to A_2 b,$$

$$A_4 \to b, \quad A_5 \to A_4 a, \quad A_6 \to A_2 a, \quad A_7 \to A_6 b.$$

Но как её эффективно построить алгоритмически, равно как и таблицу 1? Для этого воспользуемся техникой, базирующейся на конечных автоматах.

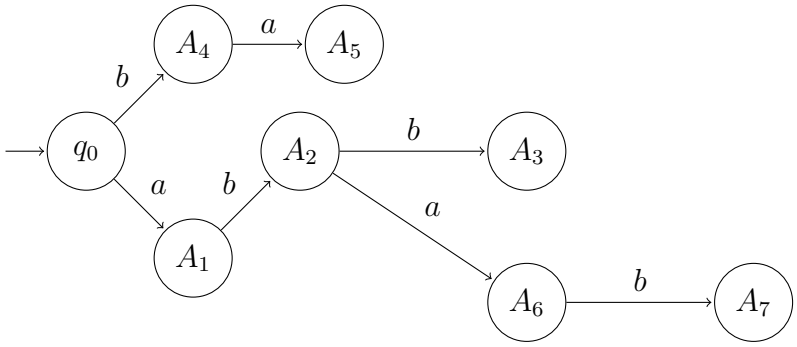


Рис. 2. LZW-автомат

В процессе построения SLG по алгоритму LZW мы строим LZW-автомат (рис. 2), который, по сути, реализует словарь. Однако, помимо стандартных функций словаря, LZW-автомат помечает каждую вершину, кроме начальной, нетерминалом A_i, устанавливая тем самым соответствие между словом w_i и состоянием автомата: $q_0 \xrightarrow{w_i} A_i$.

Итак, опишем алгоритм LZW построения SLG. В начале работы алгоритма словарь (реализуемый LZW-автоматом) пуст; обозначим через u необработанную часть входа – в начале работы $u = w$.

Алгоритм находит кратчайший префикс $x \neq \varepsilon$ слова $u = xy$, которого ещё нет в словаре, и добавляет его в словарь, помечая вершину, соответствующую этому слову новым нетерминалом A_i. Алгоритм повторяет этот процесс, удалив из u префикс x ($u = y$), до тех пор, пока либо слово u не окажется пустым, либо u не будет содержаться в словаре. При этом если префикс x добавляется в словарь, то $x = va, a \in \Sigma$, а слово v уже было добавлено в словарь и ему соответствует некоторый нетерминал A_j. Тогда алгоритм добавляет в грамматику переход $A_i \to A_j a$. Если же u целиком содержится в словаре, то ему уже соответствует нетерминал A_j – в этом случае алгоритм добавляет правило $A_i \to A_j$. После окончания построения LZW-автомата алгоритм добавляет к грамматике правило $S \to A_1 \dots A_n$, где n – номер последнего добавленного нетерминала.

Приведённый алгоритм, очевидно, работает за линейное время (от длины w). Строку, сжатую алгоритмом LZW, легко декодировать, как и строку, заданную произвольной SLG: нужно вывести единственную строку из грамматики, при этом каждый нетерминал раскрывается единственным образом. Также для алгоритма LZW справедливо замечание 2.

Задача 35. Постройте LZW-автомат и SLG G_w по описанному выше алгоритму для слова w:

1) $w = a^8$; 2. $w = tobeornottobeortobeornot$.

Задача 36. Постройте для слова $w = tobeornottobeortobeornot$ SLG, которая оптимальнее, чем построенная по алгоритму LZW. Численным показателем оптимальности является сумма длин правых частей всех правил SLG.

Элементы синтаксического анализа

LL-анализ

Задача 37. Определить, являются ли LL(k)-грамматиками следующие грамматики (заданные правилами). Если да, указать точное значение k:

а) $S \to Ab$, $A \to Aa \mid a$;

б) $S \to Ab$, $A \to aA \mid a$;

в) $S \to aAb$, $A \to BB$, $B \to ab \mid A \mid \varepsilon$;

г) $S \to aAb$, $A \to AaAb \mid \varepsilon$;

д) $S \to aB$, $B \to aBB \mid b$.

Задача 38. Построить LL(1)-грамматику, эквивалентную грамматике из задачи **26(б)**, и управляющую таблицу для неё.

Задача 39. Написать для грамматики эквивалентную LL(1)-грамматику, построить LL(1)-анализатор и продемонстрировать его работу на слове $baab$.

$$S \to baaA \mid babA \qquad A \to \varepsilon \mid Aa \mid Ab$$

Задача 40*. Докажите, что язык $a^* \cup a^n b^n$ не является LL(1)-языком, то есть не существует LL(1)-грамматики, порождающей этот язык.

Задача 41. Язык L задан неоднозначной КС-грамматикой

$$G = \{\{S\}, \{(,)\}, \{S \to (S) \mid SS \mid ()\}, S\}.$$

Написать LL(1)-грамматику для языка L.

Контрольные вопросы

Задача 42. Существует ли такая праволинейная (не обязательно регулярная праволинейная) грамматика, которая не является LL(1)-грамматикой?

Задача 43. В приведённой грамматике[1] G есть правило $S \to AB$ и при этом $\mathrm{FIRST}(A) \cap \mathrm{FIRST}(B) = \varepsilon$. Верно ли, что грамматика G может быть LL(1)-грамматикой?

Задача 44. Пусть для некоторых двух нетерминалов A и B приведённой КС-грамматики G пересечение $\mathrm{FOLLOW}(A) \cap \mathrm{FOLLOW}(B)$ оказалось непустым. Верно ли, что грамматика G не является LL(1)-грамматикой?

[1] Грамматика называется приведённой, если в ней нет недостижимых и бесплодных символов. В литературе также встречаются неэквивалентные определения этого термина.

LR-анализ

Задача 45. Дана грамматика $G = \{\ \{A, S\},\ \{a, b, c\},\ \{\ S \to Aa \mid b \mid \varepsilon;\ A \to Ab \mid c\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для цепочки $cbba$.

Задача 46. Дана грамматика $G = \{\ \{A, S\},\ \{a\},\ \{\ S \to A;\ A \to aAa \mid a\ \},\ S\}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для цепочки $aaaaa$.

Задача 47. Дана грамматика $G = \{\ \{A, S\},\ \{a, b, c\},\ \{S \to Aa \mid b; A \to\ Ab \mid c\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Продемонстрировать работу анализатора на цепочке $cbbab$.

Задача 48. Зафиксируем КС-грамматику G и рассмотрим множество её LR(0)-ситуаций. Будем говорить, что между двумя ситуациями $\alpha.X\beta$ и $\alpha X.\beta$ определён переход по $X \in N \cup T$; также между ситуациями $A \to \alpha.B\beta$ и $B \to .\gamma$ определён ε-переход.

Конечный автомат, в качестве состояний которого выступают LR(0)-ситуации, а переходы определены по правилам, указанным выше, называют (недетерминированным) LR(0)-*автоматом* или (недетерминированным) *автоматом Кнута*. Автомат, полученный в результате детерминизации описанного автомата, называют детерминированным LR(0)-автоматом или детерминированным автоматом Кнута.

1. Выпишите все LR(0)-ситуации для грамматики G, заданной правилами $S \to aS \mid b$.

2. Постройте недетерминированный автомат Кнута для грамматики G.

3. Постройте детерминированный автомат Кнута для грамматики G.

4. Постройте LR(0)-анализатор для грамматики G. Сравните автомат Кнута с таблицей переходов LR(0)-анализатора для грамматики G.

Задача 49. Грамматика G задана правилами:

$$S \to Ab, \quad A \to aAa, \quad A \to B, \quad B \to b.$$

1. Построить LR(1) и LR(0)-анализаторы для грамматики G по алгоритму из курса.

2. Постройте LR(0)-анализатор по LR(1)-анализатору из пункта 1 следующим образом. Сотрите все аванцепочки и постройте управляющую таблицу LR(0)-анализатора по получившемуся автомату Кнута. Верно ли, что полученный LR(0)-анализатор является анализтором для грамматики G? То есть для любого слова, порождаемого G, анализатор строит корректный правый разбор, а слова, не порождаемые G, анализатор отвергает.

3. Покажите, что LR(0)-анализатор для грамматики G из пункта 1 можно построить путём применения следующей процедуры, схожей с процедурой минимизации ДКА, к LR(0)-автомату, полученному из LR(1)-анализатора в пункте 2.

В случае минимизации LR(0)-автомата все состояния с операциями свёртки оказываются на первом шаге в разных группах (разных ящиках), если свёртки происходят по разным правилам; состояния с операциями сдвига находятся в одном ящике. Далее процедура минимизации LR(0)-автомата не отличается от процедуры минимизации ДКА.

Контрольные вопросы

Задача 50. При построении LR(1)-анализатора для грамматики G в одном множестве оказались ситуации $[A \to .aA\alpha, b]$ и $[B \to \beta.a, a]$, где α, β – некоторые цепочки из $(N \cup T)^*$. Может ли грамматика G оказаться LR(0)-грамматикой?

Атрибутные грамматики

Следующим за синтаксическим анализом этапом в процессе компиляции является генерация кода. В основе этого этапа лежат вычисления по дереву разбора, которые описывают с помощью атрибутных грамматик. Мы не будем детально изучать эту тему, а изучим лишь частный случай атрибутных грамматик (с синтезируемыми атрибутами).

Определение 3. КС-грамматика G называется *атрибутной с синтезируемыми атрибутами*, если каждому нетерминалу поставлен в соответствие набор переменных (атрибутов), и при этом для каждого правила грамматики

$$X_0 \to u_0 X_1 u_1 X_2 \dots u_{n-1} X_n u_n, X_i \in N, u_i \in \Sigma^*$$

задан набор правил вычисления некоторых атрибутов

$$X_0[\mathsf{attr}] = f(X_1[\mathsf{attr}_1],\, X_2[\mathsf{attr}_2], \dots,\, X_n[\mathsf{attr}_n]);$$

здесь $X_i[\mathsf{attr}_i]$ – значение атрибута attr_i для нетерминала X_i , а f – некоторая функция. Набор правил вычислений атрибутов называют *атрибутной схемой.*

Замечание 3. *В книге [3] используются другие обозначения для атрибутных грамматик (традиционные для этой области). Вместо* $X_i[\mathsf{attr}]$ *пишут* $\mathsf{attr}(X_i)$*. Кроме того, там рассмотрен более общий случай атрибутных грамматик – с синтезируемыми и наследуемыми атрибутами. Выполняя задание, можно придерживаться одного из двух типов обозначений (заметим, что они непротиворечивы). Однако, пожалуйста, не смешивайте эти два набора.*

Пример 3. Грамматика G задана правилами

$$S \to 1D \mid 0,\ D \to 1D \mid 0D \mid 1 \mid 0$$

и порождает язык двоичных записей натуральных чисел. Определим атрибутную схему для этой грамматики

$S \to 0$	$D \to 1$	$D \to 0$	$S \to 1D$
$S[\mathsf{val}] = 0$	$D[\mathsf{val}] = 1$	$D[\mathsf{val}] = 0$	$S[\mathsf{val}] = D[\mathsf{ord}] + D[\mathsf{val}]$
	$D[\mathsf{ord}] = 2$	$D[\mathsf{ord}] = 2$	

$D_0 \to 1D_1$	$D_0 \to 0D_1$
$D_0[\mathsf{val}] = D_1[\mathsf{ord}] + D_1[\mathsf{val}]$	$D_0[\mathsf{val}] = D_1[\mathsf{val}]$
$D_0[\mathsf{ord}] = 2 \times D_1[\mathsf{ord}]$	$D_0[\mathsf{ord}] = 2 \times D_1[\mathsf{ord}]$

В случае, если правило содержит несколько одинаковых нетерминалов, мы нумеруем их вхождение и различаем атрибуты, как в случае двух последних правил. Нетерминал S имеет единственный атрибут val, а нетерминал D – атрибуты val и ord. Приведённая атрибутная схема вычисляет значение числа по его двоичной записи. Атрибут ord равен 2^l, где l – длина слова, выведенного из D, атрибут val равен значению числа, двоичная запись которого выведена из нетерминала.

Приведём пример вычисления атрибутов для слова 1101. Атрибуты вычисляются снизу вверх.

Задача 51. Грамматика $\mathsf{RExpr} = \langle \{E, T\}, \{a, b, +, {}^*, (,)\}, P, E \rangle$ имеет множество правил P :

$$E \to (E)^* \mid T + T \mid TT \qquad T \to (E) \mid (E)^* \mid a \mid b$$

и порождает регулярные выражения над алфавитом $\{a, b\}$.

1. Постройте для грамматики RExpr LR(1)-анализатор.

2. Дополните грамматику RExpr до атрибутной так, чтобы она вычисляла атрибуты $\mathsf{firstpos}$, $\mathsf{lastpos}$ и $\mathsf{nullable}$ согласно алгоритму их вычисления при построении ДКА по РВ.

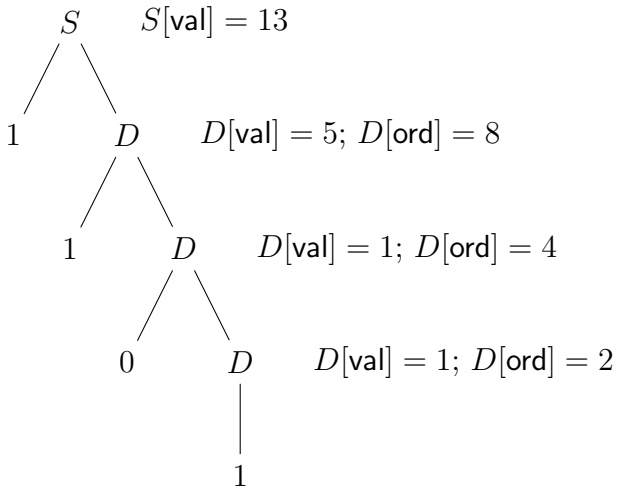


Рис. 1. Вычисление атрибутов.

Указание. Вычисление атрибута нужно определять через описание функции, которую можно описать на языке программирования или псевдокоде. Пример вычисления атрибута nullable для правила $E \to T_1 + T_2$:

```
E[nullable] = function( T1[nullable], T2[nullable]){
    if( T1[nullable] or T2[nullable]){
       return True;
    } else{ return False; }
}
```

3*. Добавьте в атрибутную схему вычисление атрибута followpos.

4. С помощью анализатора постройте дерево разбора для РВ $(a + ab)^* + +a(b)^*$ и вычислите атрибуты firstpos, lastpos, nullable (*followpos) согласно атрибутной схеме.

Дополнительные задачи

В этот раздел входят задачи для подготовки к контрольным работам и экзаменам, а также задачи повышенной сложности для студентов, претендующих на высокие оценки. Задачи данного раздела не являются обязательными для прохождения процедуры сдачи задания, если только не входят в требования семинариста. Во всех письменных общекурсовых работах значение k в задачах на построение LR(k)-анализаторов не превосходит единицу.

Регулярные языки

Задача 52. Пусть X – регулярный язык над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$. Верно ли, что язык $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\Sigma^* \setminus X)^n$ является регулярным?

Задача 53. Приведите пример бесконечного регулярного языка X над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$, такого что $X \cap (\Sigma^* \setminus X)^R = X$ и $X \neq \Sigma^*$.

Задача 54. Найдите разбиения на минимальное число классов правоинвариантной[1] (И/ИЛИ левоинвариантной) эквивалентности, которые индуцируют следующие языки.

1. Язык, порождаемый выражением $00(10 + 01)^*$.

[1]Правоинвариантная эквивалентность – другое название эквивалентности Майхилла–Нероуда. Левоинвариантная эквивалентность определяется симметрично правоинвариантной.

2. Язык $\{a^{n^2} \mid n \geqslant 0\}$ в однобуквенном алфавите.

КС-языки

Задача 55. Язык L задан грамматикой G с правилами:

$$S \to bSa \mid AB \mid \varepsilon, \quad A \to bAb \mid b, \quad B \to aBa \mid \varepsilon.$$

Является ли язык L и его дополнение регулярным языком, КС-языком?

Задача 56. Являются ли следующие языки КС-языками:

1. $\{x \mid x \in \{c,b\}^*, |x|_c = |x|_b, \forall u,v : x = uv, |u| \neq 0, |v| \neq 0, |u|_c > |u|_b\}$.

2. $\{a^{3^n} \mid n > 0\}$?

Задача 57*. Пусть A – МА. Постройте МА B, принимающий все префиксы языка $L(A)$, т.е. язык $L(B) = \{x \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L(A)\} \subseteq \Sigma^*$.

Задача 58. Для языка

$$L = \{w \mid w = xc^{3k}y; x,y \in \{a,b\}^*; |xy|_a = 2n;\ n,k \geqslant 0\}$$

($|xy|_a$ – число символов a в слове xy)

1) постройте КС-грамматику G, порождающую язык L;

2) постройте недетерминированный МА, эквивалентный этой грамматике;

3) продемонстрируйте работу построенного МА на слове *accab* (проанализируйте все варианты поведения).

Задача 59. Заданы языки $L_1 = \{a^n b^n c^m : n \geqslant 1, m \geqslant 0\}$, $L = \{f^n a^m b^m : n \geqslant 0, m \geqslant 0\}$. Для языка $L_1 \cup L_2$ построить однозначную КС-грамматику и детерминированный МП-автомат. Решение обосновать.

Элементы синтаксического анализа

Задача 60. Язык L задан неоднозначной КС-грамматикой:

$$G = \{\, \{S\},\, \{a, .\,, \wedge\,, [\,,]\,, (\,,)\,\},\, \{\, S \to a \mid S.S \mid S[S] \mid S\wedge \mid S(S)\,\},\, S\,\}.$$

Написать LL(1)-грамматику для языка L.

Задача 61. Дана грамматика $G = \{\ \{A, B, C, D, E, S\},\ \{a, b\},\ \{S \to AB,\ A \to a,\ B \to CD \mid aE,\ C \to ab,\ D \to bb,\ E \to bba\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для слова $aabbb$ с помощью анализатора.

Задание составил А. А. Рубцов, к.ф.-м.н.

Задание содержит авторские задачи педагогического коллектива кафедры МОУ и классические задачи теории формальных языков.

С методическими материалами по курсам кафедры МОУ можно ознакомиться на страницах:

http://www.mou.mipt.ru, http://trpl7.ru,
http://lrk.umeta.ru, http://rubtsov.su.