Ноябрьская контрольная по ТРЯП
Задачи

ФУПМ 2018

Блок основных задач

Задача 1 $\langle$i$\rangle$(2). Язык L задан регулярным выражением $(b|ab|aab^*a)^*aab^*$. Построить эквивалентный ДКА.

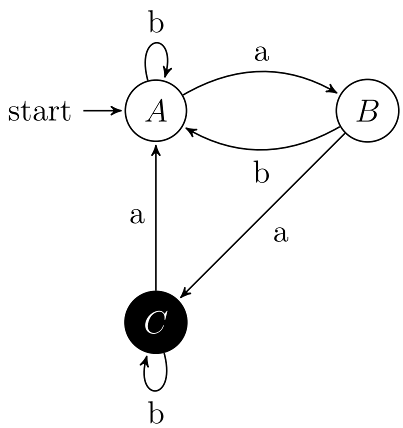
1 $\langle$ii$\rangle$. $((ab^*a|b)a^*b)^*$.

Решение.

1 $\langle$i$\rangle$. $(\underset{1}{b}|\underset{2}{a}\underset{3}{b}|\underset{4}{a}\underset{5}{a}\underset{6}{b}^*\underset{7}{a})^*\underset{8}{a}\underset{9}{a}\underset{10}{b}^*\underset{11}{\#}$

i	Followpos(i)
1	1,2,4,8
2	3
3	1,2,4,8
4	5
5	6,7
6	6,7
7	1,2,4,8
8	9
9	10,11
10	10,11

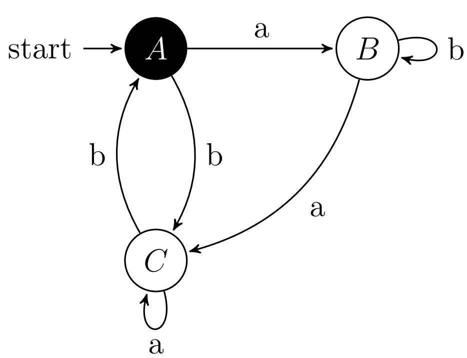
	a	b
A=$\underset{b}{1}, \underset{a}{2}, \underset{a}{4}, \underset{a}{8}$	B	A
B=$\underset{b}{3}, \underset{a}{5}, \underset{a}{9}$	C	A
C=$\underset{b}{6}, \underset{a}{7}, \underset{b}{10}, \underset{\#}{11}$	A	C



1 $\langle$ii$\rangle$. $((\underset{1}{a}\underset{2}{b}^*\underset{3}{a}|\underset{4}{b})\underset{5}{a}^*\underset{6}{b})^*\underset{7}{\#}$

i	Followpos(i)
1	2,3
2	2,3
3	5,6
4	5,6
5	5,6
6	1,4,7

	a	b
A=$\underset{a}{1}, \underset{b}{4}, \underset{\#}{7}$	B	C
B=$\underset{b}{2}, \underset{a}{3}$	C	B
C=$\underset{a}{5}, \underset{b}{6}$	C	A



Задача 2 (2). Построить ДКА для языка L, если дополнение языка $\bar{L}$

задано грамматикой:

2 $\langle$i$\rangle$. $(\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \{A \to bA \mid bB \mid aE; B \to aB \mid bC \mid D; C \to aC \mid aA; D \to aE \mid \varepsilon; E \to aE \mid bE\}, A)$.

2 $\langle$ii$\rangle$. $(\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aC \mid aB; B \to aA \mid bA \mid bB \mid b; C \to \varepsilon\}, A)$.

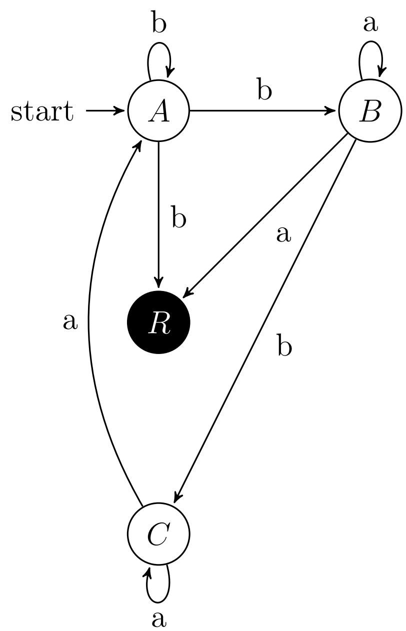
Решение.

Используя стандартные процедуры, строим:

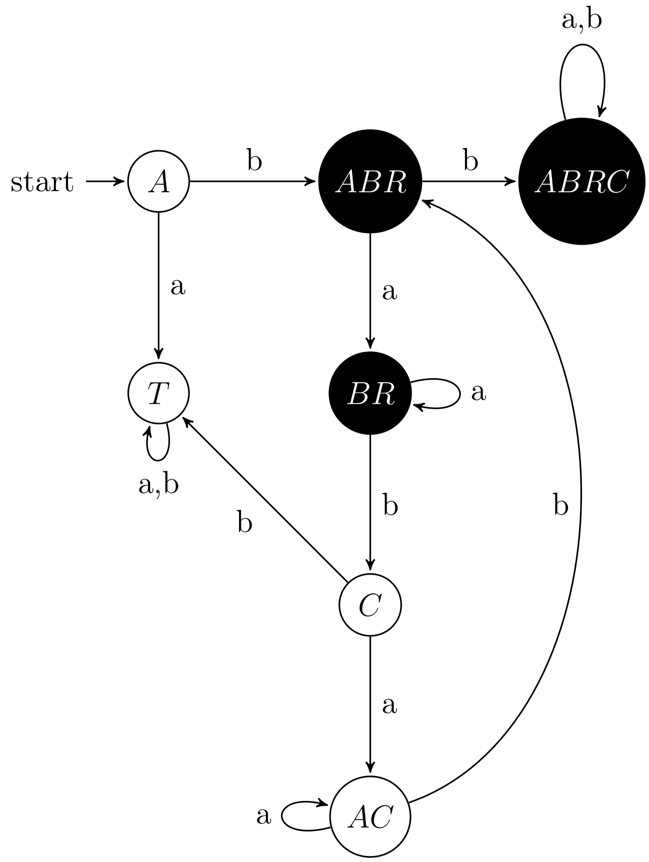
- по праволинейной грамматике праволинейную регулярную
- по праволинейной регулярной грамматике НКА
- по НКА строим ПДКА для $\overline{L}$
- обращаем финальные и не финальные состояния и получаем ПДКА для L

2 $\langle$i$\rangle$.

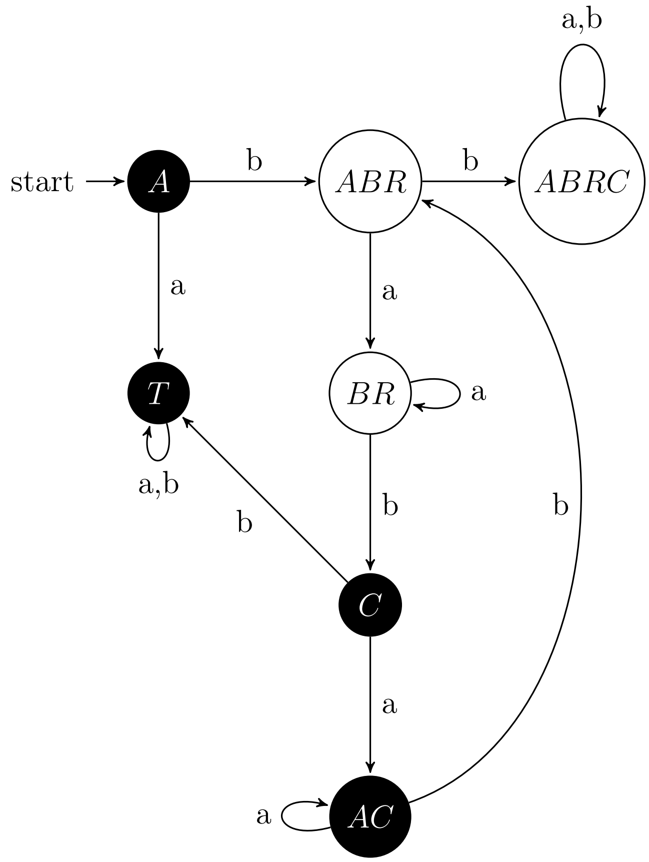
- Поскольку нетерминал D присутствует только в правой части $B \to D$ и левой части $D \to \varepsilon$ и $D \to aE$, заменим эти три правила на $B \to \varepsilon$ и $B \to aE$ и получим эквивалентную праволинейную грамматику. Данная грамматика все еще не является регулярной, поскольку содержит правило $B \to \varepsilon$. Нетерминал B встречается в правых частях правил $A \to bB$, $B \to aB$. Удалим правило $B \to \varepsilon$ и добвим вместо него $A \to b$, $B \to a$. Из нетерминала E выводятся только aE и bE, а значит не существует вывода слова из терминалов с участием нетерминала E. Следовательно, при удалении всех правил с участием нетерминала E получим эквивалентную праволинейную регулярную грамматику.
- По праволинейной регулярной грамматике НКА:



- По НКА строим ПДКА:

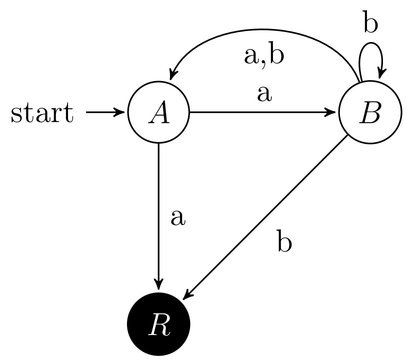


- Обращаем финальные и не финальные состояния и получаем ПД-КА для L:

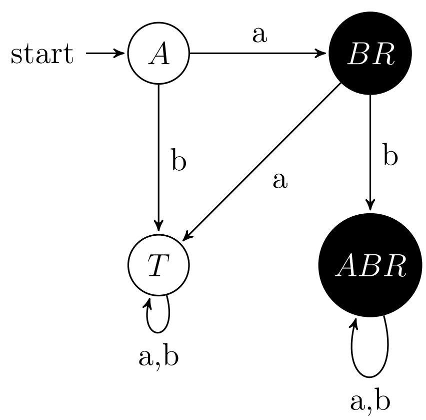


2 ⟨ii⟩. В этой задаче опечатка в множестве нетерминальных символов.

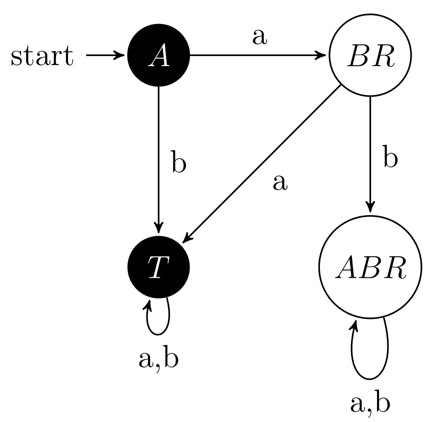
- Поскольку нетерминал C присутствует только в правой части $A \to aC$ и левой части $C \to \varepsilon$, заменим эти два правила на $A \to a$ и получим эквивалентную праволинейную регулярную грамматику.
- По праволинейной регулярной грамматике НКА:



- По НКА строим ПДКА:

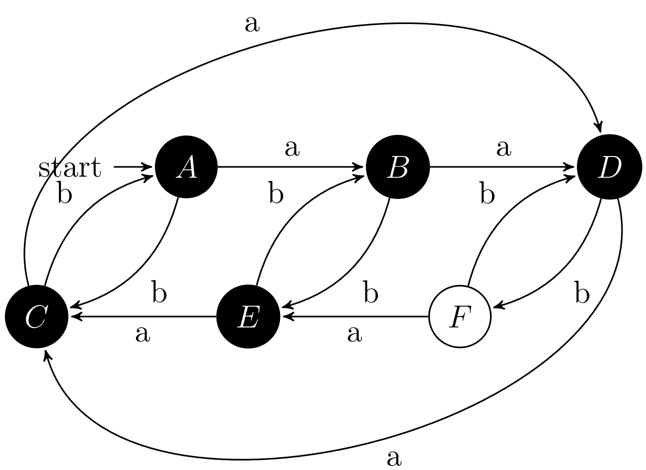


- Обращаем финальные и не финальные состояния и получаем ПД-КА для L:

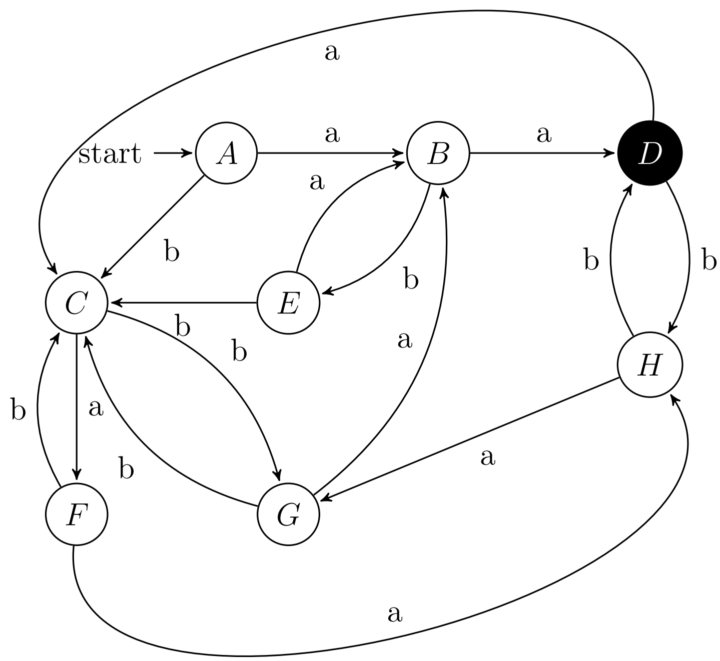


Задача 3 (2). Для ДКА, заданного диаграммой, построить всюдуопределённый минимальный ДКА.

3 ⟨i⟩.



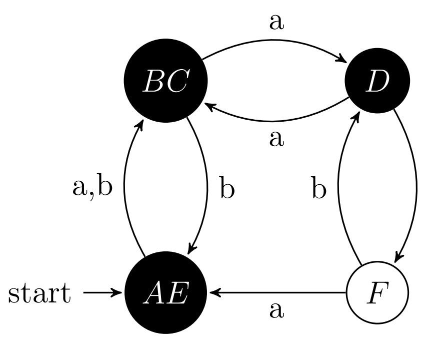
3 ⟨ii⟩.



Решение.

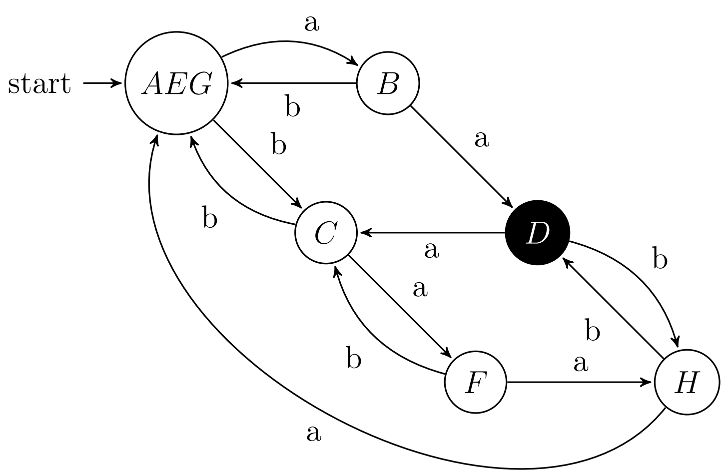
3 $\langle$i$\rangle$. Данный автомат является ПДКА. Построим минимальный ПДКА по стандартной процедуре:

{ABCDE}{F}
{ABCE}{D}{F}
{AE}{BC}{D}{F}



3 $\langle$ii$\rangle$. Данный автомат является ПДКА. Построим минимальный ПДКА по стандартной процедуре:

{ABCEFGH}{D}
{ACEFG}{BH}{D}
{AEG}{B}{C}{D}{F}{H}



Задача 4 (3) [Д.Г.]. Является ли язык L регулярным?

4 $\langle$i$\rangle$. $L = \{a^{i+2j}b^{3j+k}c^{k+2i} \mid i \geqslant 0, j \geqslant 0, k \geqslant 0\}$

4 $\langle$ii$\rangle$. $L = \{a^{2i+j}b^{j+4k}c^{3k+i} \mid i \geqslant 0, j \geqslant 0, k \geqslant 0\}$

Решение.

Запишем отрицание леммы о разрастании:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists w \in L \quad |w| \geqslant n \quad \forall x, y, z \in \Sigma^*$
$(xyz = w) \cdot (|xy| \leqslant n) \cdot (|y| \geqslant 1) \quad \exists t \in \mathbb{N} \cup \{0\} : xy^t z \notin L$

4 $\langle$i$\rangle$. $(3j + k) + (k + 2i) \geqslant i + 2j$, то есть количество букв a не превышает количество остальных букв в слове. Возьмем любое $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим слово $w = a^{i+2j} b^{3j+k} c^{k+2i}$ такое, что $i \geqslant n$. Тогда для любого разбиения слова w на x, y, z такого, что $(xyz = w) \cdot (|xy| \leqslant n) \cdot (|y| \geqslant 1)$ слово $y = a^r$, $r \geqslant 1$. Тогда слово $xy^{2(3j+k)+2(k+2i)} z$ содержит больше букв a, чем остальных, то есть не принадлежит языку L. Следовательно, выполняется отрицание леммы о разрастании, а значит язык не является регулярным.

4 $\langle$ii$\rangle$. $2((j+4k)+(3k+i)) \geqslant 2i+j$, то есть количество букв a не превышает удвоенное количество остальных букв в слове. Возьмем любое $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим слово $w = a^{2i+j} b^{j+4k} c^{3k+i}$ такое, что $i \geqslant n$. Тогда для любого разбиения слова w на x, y, z такого, что $(xyz = w) \cdot (|xy| \leqslant n) \cdot (|y| \geqslant 1)$ слово $y = a^r$, $r \geqslant 1$. Тогда слово $xy^{4((j+4k)+(3k+i))} z$ содержит больше букв a, чем удвоенное количество остальных, то есть не принадлежит языку L. Следовательно, выполняется отрицание леммы о разрастании, а значит язык не является регулярным.

Задача 5 (4) [A.P.]. Язык $L_>$ задан над алфавитом $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Является ли он регулярным?

5 $\langle$i$\rangle$.

$$L_> = \left\{ w \;\middle|\; |w| = 2n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} w[2i] > \sum_{i=1}^{n} w[2i-1] \right\}$$

5 $\langle$ii$\rangle$.

$$L_< = \left\{ w \;\middle|\; |w| = 2n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} w[2i] < \sum_{i=1}^{n} w[2i-1] \right\}$$

Решение.

Запишем отрицание леммы о разрастании:

$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists w \in L \quad |w| \geqslant m \quad \forall x, y, z \in \Sigma^*$
$(xyz = w) \cdot (|xy| \leqslant m) \cdot (|y| \geqslant 1) \quad \exists t \in \mathbb{N} \cup \{0\} : xy^t z \notin L$

5 $\langle$i$\rangle$. Возьмем любое $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим слово $w = (01)^m (10)^{m-1}$. Сумма четных разрядов в нем больше, чем сумма нечетных ровно на 1. Количество букв в слове четное. То есть слово w лежит в языке L. Рассмотрим произвольное разбиение слова w на x, y, z такое, что $(xyz = w) \cdot (|xy| \leqslant m) \cdot (|y| \geqslant 1)$. Если подслово y имеет нечетную длинну, то xy^2z имеет нечетную длинну и не принадлежит языку L. Если подслово y имеет четную длинну, то y содержит хотябы одну единицу, причем все лежащие в y единицы находятся на четных разрядах слова w. Но тогда xy^0z будет содержать столько же единиц на нечетных разрядах, что и xyz, но меньше единиц на четных разрядах. Но тогда в слове xy^0z сумма четных разрядов не больше чем сумма нечетных разрядов, а значит слово не принадлежит языку L. Следовательно, для языка L выполняется отрицание леммы о разрастании

5 $\langle$ii$\rangle$. Возьмем любое $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим слово $w = w = (10)^m(01)^{m-1}$. Сумма нечетных разрядов в нем больше, чем сумма четных ровно на 1. Количество букв в слове четное. То есть слово w лежит в языке L. Остальная часть решения аналогична предыдущему пункту.

Задача 6 (4) [А.Р.]. Язык L заданнад алфавитом $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Является ли он регулярным?

6 $\langle$i$\rangle$.

$$L = \left\{ w \;\middle|\; \exists i, j, k, l, m \geqslant 0 : w[i] = w[j] = 2l,\ i \neq j \text{ и } \max_{i \leqslant k \leqslant j}(w[k]) = 2m \right\}$$

Или другими словами, $w \in L$, если и только если максимум на некотором отрезке с одинаковыми чётными цифрами на концах чётный.

6 $\langle$ii$\rangle$.

$$L = \left\{ w \;\middle|\; \exists i, j, k, l, m \geqslant 0 : w[i] = w[j] = 2l + 1,\ i \neq j \text{ и } \min_{i \leqslant k \leqslant j}(w[k]) = 2m + 1 \right\}$$

Или другими словами, $w \in L$, если и только если минимум на некотором отрезке с одинаковыми нечётными цифрами на концах нечётный.

Решение.

Обозначим $\overline{L}_y^x$ язык, содержащий отрезок с концами y и максимумом x $(x \geqslant y)$, а $\underline{L}_y^x$ язык, содержащий отрезок с концами y и минимумом x $(x \leqslant y)$.

$$\overline{L}_x^x = \Sigma^* x(0 + \ldots + x)^* x \Sigma^*$$

$$\overline{L}_y^x = \Sigma^* y(0 + \ldots + x)^* x(0 + \ldots + x)^* y \Sigma^*$$

$$\underline{L}_x^x = \Sigma^* x(x + \ldots + 9)^* x \Sigma^*$$

$$\underline{L}_y^x = \Sigma^* y(x + \ldots + 9)^* x(x + \ldots + 9)^* y \Sigma^*$$

6 $\langle$i$\rangle$. $L = \overline{L}_0^0 \cup \overline{L}_0^2 \cup \overline{L}_0^4 \cup \overline{L}_0^6 \cup \overline{L}_0^8 \cup \overline{L}_2^2 \cup \overline{L}_2^4 \cup \overline{L}_2^6 \cup \overline{L}_2^8 \cup \overline{L}_4^4 \cup \overline{L}_4^6 \cup \overline{L}_4^8 \cup \overline{L}_6^6 \cup \overline{L}_6^8 \cup \overline{L}_8^8$ Язык L является регулярным как объединение конечного числа регулярных языков.

6 $\langle$ii$\rangle$. Аналогично предыдущему.

Вопросы и мини задачи

Задача 7 (1) [Пентус].

7 $\langle$i$\rangle$. Существует ли такой язык L, что языки L и $\{a, b\}^* \setminus L$ оба конечны?

7 $\langle$ii$\rangle$. Существует ли такой конечный язык L, что языки L и $\{a, b\}^* \setminus L$ оба нерегулярны?

Решение.

7 $\langle$i$\rangle$. Объединение двух конечных множеств является конечным,

$$\{a, b\}^* \setminus L \cup L = \{a, b\}^*,$$

а $\{a, b\}^*$ является бесконечным множеством. Следовательно, языки языки L и $\{a, b\}^* \setminus L$ не могут быть оба конечными.

7 $\langle$ii$\rangle$. Нет, конечный язык всегда является регулярным.

Задача 8 (2).

8 $\langle$i$\rangle$. Пересечения языка L и регулярного языка R регулярный язык. Следует ли отсюда, что L регулярный язык?

8 ⟨ii⟩. Пересечения языка L_1 и нерегулярного языка L_2 нерегулярный язык. Следует ли отсюда, что L_1 нерегулярный язык?

Решение.

8 ⟨i⟩. Нет, не следует. Пусть, например, R задается выражением a^*, а $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$. Их пересечение является пустым множеством, а пустое множество является регуларным языком.

8 ⟨ii⟩. Нет, не следует. Пусть, например, L_2 задан в алфавите Σ, а $L_1 = \Sigma^*$. Тогда L_1 является регулярным, а пересечение L_1 и L_2 совпадает с L_2, то есть является нерегулярным.

Задача 9 (3) [A.P.].

9 ⟨i⟩. Сколько состояний в полном минимальном ДКА, распознающем все слова над алфавитом $\{a, b\}$, содержащие хотя бы одно подслово из списка aa, bab, bba, ba, bbb?

9 ⟨ii⟩. Сколько состояний в полном минимальном ДКА, распознающем все слова над алфавитом $\{a, b\}$, содержащие хотя бы одно подслово из списка ba, aab, aaa, bb, bba?

Решение.

9 ⟨i⟩. ba является подсловом bab, bba. Следовательно, достаточно рассмотреть подслова aa, ba, bbb.

Классы эквивалентности Майхилла — Нероуда будут иметь вид:

1. Сам язык L
2. Слова из дополнения, у которых на конце a
3. Слова из дополнения, у которых на конце один символ b
4. Слова из дополнения, у которых на конце два символа b
5. ε

Соответственно, состояний в минимальном ПДКА будет пять.

9 ⟨ii⟩. bb является подсловом bba. Следовательно, достаточно рассмотреть подслова ba, aab, aaa, bb.

Классы эквивалентности Майхилла — Нероуда будут иметь вид:

1. Сам язык L

2. Слова из дополнения, у которых на конце два символа a или символ b.

3. Слова из дополнения, у которых на конце один символ a

4. ε

Соответственно, состояний в минимальном ПДКА будет четыре.

Задача 10 (3) [А.Р.].

10 $\langle$i$\rangle$. Пусть L нерегулярный язык, а $\mathcal{F}$ — семейство классов L-эквивалентности (множество, состоящее из классов). Верно ли, что язык, $F = \bigcup\limits_{C\in\mathcal{F}} C$, получившийся в результате объединения всех классов эквивалентности нерегулярный?

10 $\langle$ii$\rangle$. Пусть L регулярный язык, а $\mathcal{F}$ — семейство классов L-эквивалентности (множество, состоящее из классов). Верно ли, что язык $F_L = \bigcup\limits_{C\in\mathcal{F}} C$, получившейся в результате объединения всех классов L-эквивалентности, распознаётся некоторым ДКА с не более чем 2018 состояний?

Решение.

По определению L-эквивалентности объединение всех классов эквивалентности совпадает с Σ^*. Язык Σ^* является регулярным языком, распознаваемым ДКА с 1 состоянием (петли по всем буквам).

Задача 11 (1+2) [А.Р.]. В РВ R над алфавитом $\{a, b\}$ вместо символов a и b подставили языки L_a и L_b в результате чего получилась формула, задающаяя язык X.

11 $\langle$i$\rangle$. 1) Если языки L_a и L_b были регулярными, мог ли язык X оказаться нерегулярным?

2) Язык X получился регулярным. Слеюует ли отсюда, что L_a и L_b — регулярные языки?

11 $\langle$ii$\rangle$. 1) Язык X получился нерегулярным. Могли ли языки L_a и L_b

оказаться регулярными?

2) Языки L_a и L_b — нерегулярные. Мог ли язык X получиться регулярным?

Решение.

11 $\langle$i$\rangle$. 1) Нет, X обязательно является регулярным, поскольку множество регулярных языков замкнуто относительно операций объединения, конкатенации и итерации по определению.

2) Нет, не следует. Пусть, например, $L_a = \{0^n 1^n | n \in \mathbb{N}\}$, $L_b = (0+1)^* \setminus L_a$, а РВ $R = a + b$. L_a и L_b не являются регулярными, а их сумма совпадает с $(0+1)^*$ и является регулярной.

11 $\langle$ii$\rangle$. 1) Множество регулярных языков замкнуто относительно операций объединения, конкатенации и итерации по определению. Следовательно, если L_a и L_b являются регулярными, то и X является регулярным.

2) Нет, не следует. Пусть, например, $L_a = \{0^n 1^n | n \in \mathbb{N}\}$, $L_b = (0+1)^* \setminus L_a$, а РВ $R = a + b$. L_a и L_b не являются регулярными, а их сумма совпадает с $(0+1)^*$ и является регулярной.