

Задание 9

Замкнутость КС-языков

Ключевые слова¹: язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, метод математической индукции.

1 Лемма о накачке

Одна из целей изучения леммы о накачке для регулярных языков – упрощение понимания леммы о накачке для КС-языков, где она уже жизненно необходима. Сформулируем лемму.

Лемма 1. Для любого КС-языка L существует константа p , такая что для любого слова w из языка L , такого что $|w| \geq p$ существует разбиение слова $w = xuyvz$, причём

- $|uyv| \leq p$
- $|uv| \geq 1$
- $\forall i \geq 0 : w_i = xu^i y v^i z \in L$

Пример 1. Язык $L = a^n b^n c^n$ не является КС-языком.

Доказательство. Предположим, что $L \in \text{CFL}$, тогда для некоторого числа p выполнена лемма о накачке. Рассмотрим слово $w = a^p b^p c^p$ (заметим, что число p является параметром, а не каким-то конкретным числом). Тогда подслово uyv из разбиения слова w , существующего по лемме о накачке, либо состоит из одинаковых букв (a^l или b^l или c^l) или имеет вид $a^l b^r$ или $b^l c^r$. Три различные буквы подслово uyv содержать не может, поскольку его длина ограничена числом p . Но тогда uv – слово, в котором нет одной из трёх букв. Пусть это будет буква c для определённости. Взяв $i = 0$, получаем, что по лемме о накачке $w_0 = a^{n-k} b^{n-m} c^n \in L$, при этом $k + m \geq 1$, откуда следует, что слово w_0 не принадлежит языку L . \square

¹минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Упражнение 1. Покажите, что КС-языки замкнуты относительно объединения.

Упражнение 2. Покажите, что КС-языки не замкнуты относительно пересечения.

Упражнение 3. Покажите, что КС-языки не замкнуты относительно дополнения.

Задача 1. Верно ли, что язык L является КС-языком? В случае положительного ответа построить КС-грамматику или МП-автомат для данного языка.

1. $L = \{a^n b^m b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$.

2. $L = \{w \mid |w|_a \geq |w|_b \geq |w|_c\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Задача 2. Докажите, что язык $\{wtw^R \mid |w| = |t|\} \subseteq \{a, b\}^*$ не является КС-языком.

Задача 3. Верно ли, что если язык L^* является КС-языком, то и язык L является КС-языком?

Определим операцию *подстановки* языков L_1, L_2, \dots, L_k над алфавитом Σ в язык M над алфавитом $\Delta_k = \{1, 2, \dots, k\}$. В результате подстановки получается язык

$$\sigma(M) = \bigcup_{w \in M} L_{w_1} \cdot L_{w_2} \cdot \dots \cdot L_{w_{|w|}},$$

то есть вместо букв каждого слова из M мы подставляем соответствующие языки и получаем язык L_w . Объединение по всем $w \in M$ языков L_w является языком $\sigma(M)$.

Задача 4. Докажите, что КС-языки замкнуты относительно операции подстановки. То есть при подстановки КС-языков L_1, L_2, \dots, L_k в КС-язык M получается КС-язык $\sigma(M)$.

Определим операцию Pref , которая ставит слову w в соответствие множество его префиксов $\text{Pref}(w) = \{x \mid \exists y : xy = w\}$, а языку ставит в соответствие множество префиксов слов из языка: $\text{Pref}(L) = \{x \mid \exists y : xy \in L\}$.

Задача 5. Докажите, что КС-языки префиксно замкнуты, т. е. для любого КС-языка L справедливо $\text{Pref}(L) \in \text{CFL}$.