Дискретная математика, основной поток. **Решения задач экзамена 24.12.16**

1. Пусть A — некоторое множество и $f\colon A \to A$ — всюду определенная функция на нем. Верно ли, что если $f(A) \neq A$, то f не является инъекцией? Если верно, то докажите это; если неверно, приведите контрпример.

Решение. *Ответ*: неверно.

Рассмотрим $A = \mathbb{N}$ (натуральные числа начинаются с нуля) и рассмотрим $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такую, что $f(n) = n + 1$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Тогда видно, что с одной стороны $f(\mathbb{N}) = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \neq \mathbb{N}$, а с другой стороны функция f является инъекцией: если $f(n) = n + 1 = k + 1 = f(k)$, то $n = k$.

2. О результатах экзамена в группе из 27 человек известно, что каждый студент получил оценку от 1 до 10, причем 10-ку получило не более 2 человек. Сколько вариантов получения оценок студентами возможны при этих условиях?

Решение. Вычислим отдельно количество вариантов, при которых k студентов получают 10-ки. Выберем k студентов из 27 $\binom{27}{k}$ способами. Они получат 10-ки. Для каждого из этих способов каждый их оставшихся $27-k$ студентов может получить одну из 9 оценок (кроме 10), т.е. остальные оценки могут быть проставлены 9^{27-k} способами и общее число вариантов по правилу произведения — $9^{27-k}\binom{27}{k}$. Нас интересуют $k = 0, 1, 2$. Поскольку эти возможности не пересекаются, по правилу суммы ответом задачи будет $9^{27} + 9^{26} \cdot 27 + 9^{25}\binom{27}{2}$.

3. В связном неорентированном графе любой путь ненулевой длины проходит хотя бы через один шарнир. Верно ли, что этот граф — дерево?

Решение. Нет, не верно. Рассмотрим граф-цикл, к каждой вершине которого прикреплен один дополнительный лист. Все вершины, входящие в циклы, будут шарнирами, и ни один путь не может проходить только по листьям.

4. Приведите пример такого вероятностного пространства и событий A, B, C в нём, что любые два события из трёх образуют пару независимых событий, но

$$\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C].$$

Решение.

Вероятностное пространство $U = \{(a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 \text{ — четно}\}$ с равновероятным распределением. Событие A — на первой позиции стоит 1, событие B — на второй позиции стоит 1, событие C — на третьей позиции стоит 1. Нетрудно видеть, что $|U| = 4$, $|A| = |B| = |C| = 2$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$, $|A \cap B \cap C| = 0$. Следовательно, $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = 1/2$, $\Pr[A \cap B] = \Pr[A \cap C] = \Pr[B \cap C] = 1/4$, $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$. Видно, что для любой пары событий из A, B, C условие независимости выполняется, но при этом $\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$.

5. Найдите необходимые и достаточные условия того, что композиция двух нестрогих линейных порядков будет нестрогим линейным порядком. Напоминание: для того, чтобы композиция была корректно определена, порядки должны быть заданы на одном и том же множестве.

Решение. Ответ: $P = Q$. Заметим, что если P рефлексивно, то для любого отношения Q отношения $P \circ Q$ и $Q \circ P$ содержат Q, так как если xQy, то xPx и пара (x, y) входит в $P \circ Q$. С $Q \circ P$ аналогично.

Поэтому, если P и Q — нестрогие линейные порядки, то $P \circ Q$ содержит $P \cup Q$. Поэтому, если $P \neq Q$, то сществуют такие не совпадающие x и y, что xPy и yQx. Но тогда обе пары (x, y) и (y, x) входят в $P \circ Q$, и оно не антисимметрично.

Пусть $P = Q$. Тогда по доказанному $P \subseteq P \circ P$. Но и наоборот. Если $(x, y) \in P \circ P$, то существует z, такой, что xPz и zPy, но по транзитивности P из этого следует xPy. Поэтому $P \circ P \subseteq P$, а значит $P \circ P \subseteq P$ и поэтому будет нестрогим линейным порядком.

6. Сколько существует отношений эквивалентности на множестве $\{0, \dots 9\}$, если известно, что в нем всего 3 класса эквивалентности, причем 1 и 2 находятся в разных классах? В ответе должно быть не более трех слагаемых.

Решение. Отношение эквивалентности однозначно задается разбиением на классы эквивалентности. Для каждого из 8 элементов (кроме 1 и 2) есть 3 варианта — быть в одном классе с 1, быть в одном классе с 2 и быть в "третьем"классе. По правилу произведения всего 3^8 вариантов. Но "третий"класс эквивалентности по условию не пуст, поэтому необходимо вычесть те варианты, в которых только два класса эквивалентности, т.е. каждый из 8 элементов находится ибо вместе с 1 либо вместе с 2. Таких случаев 2^8. Ответ: $3^8 - 2^8$.

7. Докажите, что число $11^{61} - 61^{11} + 50$ делится на 671.

Решение. $11^{61} - 61^{11} + 50 = 11^{61} - 11 + 11 - (61^{11} - 61 + 61) + 50 = (11^{61} - 11) - (61^{11} - 61)$. Первое слагаемое делится на 61 по малой теореме Ферма, и на 11 по очевидным причинам. Второе — наоборот. Поэтому их сумма тоже детится на $11 \cdot 61 = 671$.

8. На ребрах неориентированного графа расставлены знаки "+"и "$-$". Знаком цикла называется произведение знаков входящих в него ребер, т.е. 1 или -1 в зависимости от четности числа "$-$". Докажите, что у любого связного графа (кроме деревьев) можно расставить знаки на ребрах так, чтобы сумма знаков всех его простых циклов была отрицательна.

Решение.

Рассмотрим произвольный связный граф G, не являющийся деревом, и расставим знаки на его ребрах случайно и равновероятно. Пусть X — случайная величина, равная сумме знаков всех простых циклов. Докажем, что $\mathrm{E}[X] = 0$. Заведем для всех циклов отдельные случайные величины: $X_1, \dots, X_k$ (k — количество простых циклов в графе G). Случайная величина X_i равна знаку i-го цикла, то есть принимает значения ± 1. Заметим, что $X = X_1 + \ldots + X_k$.

Заметим также, что для всякого i верно $\mathrm{E}[X_i] = 0$. Действительно, покажем, что $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = -1] = 1/2$. Для этого выберем произвольное ребро e в i-ом цикле и разобьем все элементарные исходы на пары. В парных исходах знаки всех ребер совпадают, кроме знака ребра e, которые в парных исходах противоположны. Тогда на одном из парных исходов знак i-го цикла равен $+$, а на другом — $-$. Значит знак цикла равен 1 ровно на одном исходе в каждой паре, а значит ровно на половине исходов. Это и означает, что $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = -1] = 1/2$.

По линейности матожидания получаем, что

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1 + \ldots + X_k] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_k] = 0.$$

Заметим теперь, что существует исход, для которого $X > 0$, а именно, тот исход, в котором на всех ребрах стоит $+$ (граф связен и не является деревом, так что хотя бы один цикл в нем есть). Обозначим через $a_1, \dots, a_m$ всевозможные значения случайной величины X, которые она принимает с положительными вероятностями $p_1, \dots, p_m$ соответственно. По определению математического ожидания получаем

$$\mathrm{E}[X] = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_m p_m = 0,$$

при этом $p_1, \dots, p_m > 0$ и известно, что одно из чисел $a_1, \dots, a_m$ положительно. Следовательно есть i, для которого $a_i < 0$. То есть, существует исход, для которого сумма знаков всех ребер отрицательна.

Набросок комбинаторного решения. У этой задаче есть и конструктивное комбинаторное решение. Приведем его набросок.

Для начала рассмотрим остовное дерево графа и припишем его ребрам знаки произвольным образом. Далее будем добавлять ребра графа в остовное дерево по очереди одно за другим. Каждый раз добавленному ребру будем присваивать знак так, чтобы не меньше половины простых циклов, которые добавляются вместе с этим ребром, имели отрицательный знак. Это дает неположительную сумму знаков. Чтобы увидеть, что сумма на самом деле отрицательная, достаточно заметить, что при добавлении первого ребра добавляется только один цикл, знак которого мы сделаем отрицательным.