Программа "зимнего"коллоквиума по дискретной математике(основной поток)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Определение полного прообраза. Пусть $f(x) = x^2$ — функция из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Найдите полный прообраз множества $\{1, 2, 3, 4\}$.»

1. Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции (при переходе можно использовать все предыдущие утверждения).
2. Правила суммы и произведения Конечные слова в алфавите. Перестановки, формулы для числа перестановок. Двоичные слова, подмножества конечного множества.
3. Формула включений и исключений.
4. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.
5. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
6. Множества. Операции над множествами, диаграммы Эйлера-Венна.
7. Логика. Основные связки, их связь с операциями на множествах.
8. Законы Моргана. Закон контрапозиции.
9. Дизъюнктивная нормальная форма.
10. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.
11. Функции. Область определения и множество значений. Образы и прообразы множеств. Полный прообраз.
12. Отображения. Инъекции, сюръекции и биекции.
13. Композиция функций. Ассоциативность композиции.
14. Обратная функция.
15. Бинарные отношения и их свойства.
16. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения.
17. Композиция бинарных отношений
18. Отношения эквивалентности.
19. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
20. Пути и циклы в графах, основные свойства.

21. Отношение достижимости (связанности) и компоненты связности графа.

22. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.

23. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.

24. Подграфы. Изоморфизм графов. Клики и независимые множества.

25. Эйлеровы циклы.

26. Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 8).

27. Ориентированные графы, основные определения.

28. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

29. Отношения частичного порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки.

30. Отношение непосредственного следования (см. листок недели 9).

31. Изоморфные отношения частичного порядка (см. листок недели 9).

32. Делимость целых чисел, основные свойства.

33. Деление целых чисел с остатком.

34. Сравнения по модулю. Основные свойства.

35. Арифметика остатков (вычетов). Обратимые остатки (вычеты).

36. Малая теорема Ферма.

37. Функция Эйлера. Теорема Эйлера.

38. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

39. Расширенный алгоритм Евклида нахождения решения линейного диофантова уравнения.

40. Простые числа, формулировка основной теоремы арифметики.

2. Примерные задачи на понимание материала курса

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Остается ли принцип математической индукции верным, если из него убрать базу? Если да, то докажите его, если нет, приведите пример.

2. Найдите количество последовательностей длины k, которые состоят из различных элементов n-элементного множества.

3. Под числом A в треугольнике Паскаля стоит число B. Может ли так случиться, что $10A < B$? (Напомним, что соседние строки в треугольнике Паскаля сдвинуты так, что число в нижней строке стоит между числами в верхней строке. Поэтому строка, в которой стоит B, находится через одну от строки, в которой стоит A.)

4. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в 0; заканчиваются в n; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

5. Сколько есть путей, состоящих из k шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в 0; заканчиваются в n; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?

6. Выразите характеристическую функцию $\chi_{A\triangle B}(x)$ через $\chi_A(x), \chi_B(x)$ и **а)** операции $\wedge, \vee, \neg$; **б)** арифметические операции $+, -, \times$.

7. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

8. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n. Найдите полный прообраз $f^{-1}(E)$, где E — множество четных чисел.

9. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

10. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наибольший простой делитель числа n. Функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отображает число n в наименьший простой делитель числа n. Верно ли, что $g \circ f \circ g = f \circ g$?

11. Пусть P_1 и P_2 — отношения эквивалентности. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) Если классы эквивалентности P_1 и P_2 пересекаются, то один из них содержится в другом.

(ii) $P_1 \cup P_2$ — отношение эквивалентности.

12. Верно ли, что композиция сюръективного и инъективного отображений инъективна?

13. Сколько существует функций из n-элементного множества в k-элементное?

14. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$; **б)** неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

15. Пусть $f : A \to B$ – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве A:

а) $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; **б)** $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

16. Есть ли такой неориентированный связный граф на 20 вершинах с 28 ребрами, в котором есть 6 вершин, попарно соединенных ребром?

17. Постройте дерево диаметра 8, в котором степени всех вершин не больше 3, а всего вершин 31. (Диаметр — длина наибольшего простого пути.)

18. Приведите пример дерева на 2017 вершинах, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы получился 2-раскрашиваемый граф.

19. В ориентированном графе на 16 вершинах исходящие и входящие степени вершин равны 1. Сколько ребер в этом графе?

20. *Остовным деревом* называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

21. Приведите пример ациклического ориентированного графа, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы граф остался ациклическим.

22. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл? Для всякого такого n постройте эйлеров цикл.

23. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $\langle V, S_P \rangle$ для каждого порядка $P \subseteq V \times V$. Здесь S_P – отношение непосредственного следования.

24. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

25. Приведите пример таких целых чисел a, b, c, что $\text{НОД}(ab, c) \neq \text{НОД}(a, c) \cdot \text{НОД}(b, c)$.

26. На сколько нулей заканчивается число 16! ?

27. Найдите остаток от деления 2^{38} на 37.

28. Решите диофантово уравнение $12x + 19y = 7$.

29. Сколько есть положительных целых делителей у числа 66^{66}?

3. Вопросы на знание доказательств.

1. Вывод принципа полной математической индукции из принципа математической индукции.

2. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.

3. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки, формула для суммы чисел в строке.

4. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)

5. Доказательство формулы включений и исключений.

6. Любая булева функция представима булевой формулой в ДНФ.

7. Операция композиции функций ассоциативна.

8. Композиция биекции $f : A \to B$ с обратной биекцией есть id_A, а композиция в обратном порядке — id_B.

9. Критерий биекции: для отображений $f : A \to B$ и $g : B \to A$ условие «$f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$» равносильно тому, что f и g биекции и f обратна к g.

10. Теорема о классах эквивалентности (корректность определения). Следствие: между отношениями эквивалентности на множестве A и разбиениями множества A на подмножества есть биекция.

11. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.

12. Доказательство критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.

13. Доказательство совпадения деревьев и минимально связных графов.

14. Теорема о корректности определения дерева (четыре свойства эквивлентны). В билете нужно будет доказать эквивалентность двух свойств (указанных в билете).

15. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1.

16. Критерий существования эйлерова цикла в неориентированном графе.

17. Сравнение $ax \equiv 1 \pmod{N}$ имеет решение тогда и только тогда, когда НОД$(a, N) = 1$.

18. Малая теорема Ферма.

19. Теорема Эйлера.

20. Корректность алгоритма Евклида и расширенного алгоритма Евклида.

21. Основная теорема арифметики.

22. Китайская теорема об остатках.

23. Мультипликативность функции Эйлера. Формула для функции Эйлера.