Программа "весеннего"коллоквиума по дискретной математике (основной поток)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Определение полного прообраза. Пусть $f(x) = x^2$ — функция из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Найдите полный прообраз множества $\{1, 2, 3, 4\}$.»

1. Основные определения элементарной теории вероятностей: исходы, события, вероятность события.

2. Формулировка формулы включений и исключений для вероятностей.

3. Условная вероятность.

4. Независимые события. Основные свойства независимых событий.

5. Случайная величина и математическое ожидание. Линейность математического ожидания.

6. Формулировка неравенства Маркова.

7. Равномощные множества.

8. Счётные множества.

9. Множества мощности континуум.

10. Определение схемы в некотором функциональном базисе. Представление схем графами.

11. Полный базис. Примеры полных и неполных базисов.

12. Полином Жегалкина (в стандартном виде).

13. Схемная сложность функции.

14. Модель разрешающих деревьев.

15. Вычислимые функции (основные свойства).

16. Разрешимые множества.

17. Перечислимые множества.

18. Универсальная вычислимая функция.

19. Отладочная функция.

20. Главная универсальная вычислимая функция.

21. Формулировка теоремы Успенского—Райса.

22. Машина Тьюринга (с одной лентой и несколькими лентами).

23. Функция, вычислимая на машине Тьюринга. Тезич Чёрча-Тьюринга.

2. Примерные задачи на понимание материала курса

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «$x_1x_2x_3x_4$ чётно».

2. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий A, B в этом пространстве, что $\Pr[A \mid B] = \frac{1}{3}\Pr[A]$.

3. Существуют ли такие события A и B, что $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[A \mid B] = 1/2$, а $\Pr[B \mid A] = 1/3$?

4. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что $\Pr[A] = \Pr[B] = 4/5$. Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?

5. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

6. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.

7. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.

8. Докажите, что биекций на множестве натуральных чисел континуум.

9. Докажите, что множество биекций между двумя отрезками не равномощно континууму.

10. Докажите полноту базиса, состоящего из функций $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, x_1x_2, 1.

11. Найдите полином Жегалкина для функции $\mathrm{MAJ}_4(x, y, z, t)$.

12. Рассматриваем схемы в стандартном базисе. Пусть схемная сложность функции f не больше A, а схемная сложность функции g не больше B. Докажите, что схемная сложность функции $f \oplus g$ не больше $A + B + 5$.

13. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ_n.

14. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе нет треугольников.

15. Докажите, что любую монотонную функцию от n переменных можно вычислить схемой размера $O(n2^n)$, используя только дизъюнкцию и конъюнкцию.

16. Постройте вычислимую биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \setminus \{p^2 \mid p \in \mathbb{N}\}$.

17. Пусть f — вычислимая биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Докажите, что обратная биекция f^{-1} также вычислима.

18. Докажите, что если функция f вычислима и $A \subset \mathbb{N}$ — перечислимое множество то и образ и прообраз множества A перечислимы.

19. Найдите разрешимое множество A и вычислимую функцию f такие, что прообраз $f^{-1}(A)$ неразрешим.

20. Пусть A — разрешимое множество, а B — перечислимое. Верно ли, что $B \setminus A$ — перечислимое?

21. Докажите, что декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

22. Пусть U — универсальная. Положим $V(n, x) = U(n-1, x)$, если $n > 0$, и $V(n, x) = 0$ иначе. Будет ли V универсальной?

23. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p, x) = x$ для любого x.

24. Приведите пример машины Тьюринга, вычисляющей нигде неопределенную функцию.

25. Постройте машину Тьюринга, находящую неполное частное от деления на 3 числа в унарной системе счисления.

3. Вопрос на знание доказательств

1. Конечное или счётное объединение конечных или счётных множеств конечно или счётно

2. Счётность декартова произведения счетных множеств. Счётность множества рациональных чисел.

3. Равномощность отрезков, интервалов, лучей и прямых (явные биекции).

4. Несчетность множества бесконечных двоичных последовательностей.

5. Теорема Кантора о неравномощности множества и множества его подмножеств.

6. Теорема Кантора—Бернштейна.

7. Формула Байеса. Формула полной вероятности.

8. Парадокс дней рождений (математическое ожидание числа людей с совпавшими днями рождений)

9. Неравенство Маркова.

10. Нижняя оценка на максимальное количество ребер в разрезе.

11. Подмножество счетного множества конечно или счетно. Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

12. Существование и единственность полинома Жегалкина (в стандартном виде).

13. Существование булевых функций от n переменных схемной сложности больше $(c2^n)/n$.

14. Верхняя оценка $O(n2^n)$ схемной сложности булевой функции от n переменных.

15. Булевы схемы для сложения и умножения n-битовых чисел. Оценка размера.

16. Булева схема для задачи о связности графа. Оценка размера.

17. Задача об угадывании числа. Верхняя и нижняя оценки.

18. Задача о сортировке нижняя оценка.

19. Задача о нахождении самои? тяжелои? монеты. Верхние и нижние оценки.

20. Вычислимые биекции между $\mathbb{N}$ и $\{0,1\}^*$, а также $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

21. Теорема Поста (о разрешимых и перечислимых множествах).

22. Пример перечислимого неразрешимого множества.

23. Из существования универсальной нумерации следует существование главной универсальной нумерации.

24. Существует неглавная универсальная нумерация.

25. Теорема Успенского—Райса.

26. Лемма об очистке мусора для машин Тьюринга. Вычислимость композиции вычислимых функции?.

27. Связь одноленточных и многоленточных машин Тьюринга.