Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 1. Индукция

1. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

б) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$;

2. Докажите, что для любого целого положительного $n \geqslant 2$ выполняется

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2} + 1.$$

3. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2017 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

4. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

а) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

5. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

6. Докажите, что любое целое положительное число $k \geqslant 48$ представимо в виде $k = 7n + 9m$, где $n \geqslant 0, m \geqslant 0$.

Указание: Докажите, что для любых целых положительных взаимнопростых чисел a и b, $a < b$, выполняется следующее утверждение. Если начиная с некоторого числа c каждое из чисел $c, c+1, \dots, c+a-1$ представимо в виде $an + bm$, где $n, m \geqslant 0$, то и любое число $d > c$ представимо в виде $d = an + bm$, где $n, m \geqslant 0$.

7. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

8. а) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

9*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 1

1. Докажите равенство

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — также целое при любом целом положительном n.

3. Докажите неравенство для всех $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > 13/24$$

4. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

5. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

6. Докажите, что для каждого $n \geqslant 1$ существует число из n цифр, делящаеся на 2^n и содержащее в десятичной записи только 3 и 4.

7. В зачёте участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачёт, каждый участник зачёта вошёл лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачёта в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

8. Целые положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_k \leqslant k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.

9. За час до открытия избирательного участка перед ним собралась очередь из 60 человек. Каждую минуту каждый мужчина, за которым стоит женщина, пропускает ее вперед. Докажите, что к открытию все женщины окажутся впереди всех мужчин.