Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 3. Комбинаторика-2

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. Найдите коэффициент при

а) x^3y^7 в разложении $(2x-y)^{10}$;

б) $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

3. Докажите, что

а) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{r}{j}\binom{s}{k-j}=\binom{r+s}{k}$;

б) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

(Желательно найти комбинаторное доказательство.)

4. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, huskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

5. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_k, что $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

6. Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя диагонали?

7. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

8. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

9. Докажите, что
$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k};$$

10. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 3

1. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0,0)$ в точку $(4,5)$?

2. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

3. Найдите число слов длины n над алфавитом $\{0,1\}$, в которых нет двух единиц подряд.

4. Назовём последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из чисел $+1, -1$ *корректной*, если для каждого $m \leqslant n$ выполняется $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$. Найдите число корректных последовательностей длины n.

5. Докажите тождество $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

Предпочтительны комбинаторные рассуждения.

6. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

7. Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.

Выполнимо ли такое техническое задание?

8. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$? Здесь F_n — n-е число Фибоначчи.

9. Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$