Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 4. Множества и логика

1. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Докажите включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \cdots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

3. Докажите равенство

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \cdots \cap (A_n \setminus B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

4. Выразите характеристическую функцию $\chi_{A\triangle B}(x)$ через $\chi_A(x), \chi_B(x)$ и **а)** операции $\wedge, \vee, \neg$;
б) арифметические операции $+, -, \times$.

5. Выразите $|A \triangle B|$ через $\chi_A(x), \chi_B(x)$ и арифметические операции.

6. Выразите в виде ДНФ булевы функции

а) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \cdots \wedge (x_1 \vee x_9)$; **б)** $\bigwedge\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 5} (x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k)$

7. Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна тому значению, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Докажите, что эту функцию можно представить в виде ДНФ, в которую не входят отрицания переменных.

8. Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

9. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

10. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

11. Для всех $n \geqslant 1$ найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S\neq\varnothing} \bigwedge_{i\in S} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus \ldots.$$

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 3

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство $(A\setminus B)\cap((A\cup B)\setminus(A\cap B)) = A\setminus B$?

2. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$?

4. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

5. Про множества A, B, X, Y известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?

6. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$.

7. Булева функция $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна 1, если количество единиц среди значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ нечётно и нулю, если чётно.

а) Выразите функцию $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через известные булевы функции (можно использовать связки $\wedge, \vee, \neg, \oplus, \rightarrow$).

б) Можно ли представить $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде ДНФ без отрицаний?

8. Пусть A, B, C, D — такие отрезки прямой, что $A \vartriangle B = C \vartriangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?

9. Запишите ДНФ, которая равна булевой функции

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_5) \wedge \dots \wedge (\bar{x}_7 \vee x_9).$$