Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 5. Функции

1. Функция g из множества положительных целых чисел в множество положительных целых чисел сопоставляет числу x наибольший простой делитель x.

а) Какова область определения g?

б) Верно ли, что если X — конечное, то и $g^{-1}(X)$ конечное?

2. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

3. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение $f(f^{-1}(B))$? B стало верным?

4. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

5. Пусть A и B — два множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f\colon A \to B$, являющая инъекцией» и «существует функция $f\colon B \to A$, являющаяся сюръекцией».

6. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$; **б)** неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

7. Пусть существуют инъекция $f\colon A \to B$ и сюръекция $g\colon A \to B$. Докажите, что тогда существует биекция $h\colon A \to B$.

8. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

9. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 5

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2. Докажите, что если множество целых чисел X конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

2. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) \mathbin{?} A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$. Нужно учесть все варианты.)

3. Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \mathbin{?} f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

4. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \mathbin{?} f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

5. Про функцию f из множества X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

6. Приведите пример такой инъекции f из множества X в множество Y, что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия

$$\begin{cases} B \neq \varnothing, \\ f^{-1}(B) = \varnothing. \end{cases}$$

7. Найдите количество неубывающих функций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

8. Пусть A и B – конечные множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из A в B совпадает с числом сюръекций из A в B. Чему равно это число?