Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 6. Бинарные отношения

Обозначения: xPy сокращение для $(x,y) \in P$. По аналогии с отношениями типа «больше». P^{-1} — обратное отношение, содержит такие пары (x,y), что $(y,x) \in P$. $\overline{P}$ — дополнительное отношение, содержит пары, не содержащиеся в P. $P \circ Q$ — композиция отношений P и Q.

1. Найдите результат операций над отношениями, определенными на множестве действительных чисел.

а) $\overline{(>)}$; **б)** $(>)^{-1}$; **в)** $(\geq)\Delta(\leq)$; **г)** $(>) \cap (<)$; **д)** $(=) \circ (>)$; **е)** $(<) \circ (<)$; **ж)** $(<) \circ (>)$.

2. Являются ли следующие отношения рефлексивными, симметричными транзитивными:

а) «точки a и b лежат на одной прямой»;

б) «прямая a перпендикулярна прямой b»;

в) «прямая a параллельна прямой b» (ответ зависит от того, по какому учебнику вы изучали геометрию)?

3. Пусть $f : A \to B$ – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве A:

а) $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; **б)** $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

4. Верно ли, что

а) композиция $f \circ g$ инъекции f и инъекции g является инъекцией?

б) композиция $f \circ g$ сюръекции f и сюръекции g является сюръекцией?

в) композиция $f \circ g$ сюръекции f и инъекции g является сюръекцией?

г) композиция $f \circ g$ инъекции f и сюръекции g является инъекцией?

5. Функции в этой задаче предполагаются всюду определенными. Говорят, что $g \colon B \to A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f, если $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \mathrm{id}_B$).

а) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой.

б) Может ли такое случиться для конечных множеств?

в) Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны?

г) Для каких функций существует левая обратная?

д) Для каких функций существует правая обратная?

6. Сравните множества:

а) $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{j\in J} B_j)$ и $\cup_{i\in I, j\in J} (A_i \times B_j)$; **б)** $(\cap_{i\in I} A_i) \times (\cap_{j\in J} B_j)$ и $\cap_{i\in I, j\in J} (A_i \times B_j)$.

7. Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq B \times B$ – отношения эквивалентности. Будет ли отношением эквивалентности отношение $R \subseteq (A \times B) \times (A \times B) : (a,b)R(a',b') \iff aPa', bQb'$?

8. Выразите отношение «племянник» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 6

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Для каких бинарных отношений P справедливо $\overline{P} = P^{-1}$?

2. Пусть бинарные отношения $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ транзитивны. Будут ли $\overline{P_1}$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?

3. Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть **а)** симметричным; **б)** транзитивным?

4. Об отображениях (всюду определенных функциях) f, g из множества A в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что f — биекция? (Множество A не обязательно конечное.)

5. О функциях f из множества A в множество B и g из множества B в множество A (не обязательно всюду определенных) известно, что $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что g всюду определена? (Множество A не обязательно конечное.)

6. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Докажите, что существуют такие множество B и отображение $f : A \to B$, что каждый класс эквивалентности C представим в виде $C = f^{-1}(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.

7. О функциях f, g из множества A в себя (не обязательно всюду определенных) известно, что $g \circ f$ нигде не определена. Множество A состоит из 11 элементов. Найдите максимально возможное количество элементов в образе $f \circ g(A)$.

8. Множество A состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \to A$, таких что $f \circ f = \mathrm{id}_A$.