

Неделя 7. Графы

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B » означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф-путь P_n имеет n вершин v_1, \dots, v_n . Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} ($1 \leq n - 1$). Таким образом, в графе-пути $n - 1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n - 1$.

1. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.
 - а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.
 - б) Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?
3. Вершинами графа, который называется *булев куб размерности n* и обозначается B_n , являются двоичные слова длины n , а соседями (вершинами, соединёнными ребром) являются пары слов, отличающихся в одной позиции.
 - а) Сколько вершин в булевом кубе B_n ?
 - б) Сколько рёбер в булевом кубе B_n ?
 - в) Сколько в булевом кубе B_n подграфов, которые являются графами-путями длины 2 (вершин в таком графе 3)?
 - г) Верно ли, что в графе B_3 есть путь длины 3000?
 - д) Верно ли, что в графе B_3 есть простой путь длины 8? длины 7?

Два графа $G = \langle V, E \rangle$ и $G' = \langle V', E' \rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \rightarrow V'$, такая что $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$.

4. Граф $S_n = \langle V, E \rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1, 2, \dots, n\}}$ (вершина $v \in V$ – подмножество множества $\{1, 2, 3, \dots, n\}$); вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $|u \Delta v| = 1$.
 - а) Докажите, что граф S_n изоморфен булеву кубу B_n .
 - б) Сколько существует различных наборов подмножеств $A_1, A_2, A_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых выполняется $|A_1 \Delta A_2| = |A_2 \Delta A_3| = 1$?

Дополнением \bar{G} графа G называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G , в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

5. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).
6. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?
7. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2017 рёбер. Верно ли, что в таком графе может не оказаться ни одного простого пути длины 64?
8. Докажите, что отношение «изоморфизм» на множестве графов является отношением эквивалентности.

Домашнее задание 7

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B » означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф-путь P_n имеет n вершин v_1, \dots, v_n . Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} ($1 \leq n - 1$). Таким образом, в графе-пути $n - 1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n - 1$.

Граф-цикл C_n имеет n вершин v_1, \dots, v_n . Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} ($1 \leq n - 1$) и пара вершин v_n и v_1 . Таким образом, в графе-цикле n рёбер. Говорят, что *длина* цикла равна n .

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?
2. Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.
3. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть подграф, который является графом-циклом длины 3.
4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?
5. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
6. Граф G имеет множество вершин $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Граф G содержит ребро $\{u, v\}$ (для определённости $u < v$), если выполняются следующие условия:

- v делится на u ;
- не существует вершины $s \in V$, такой что v делится на s и s делится на u .

а) Постройте граф G .

б) Изоморфен ли этот граф булеву кубу B_3 ? При положительном ответе укажите биекцию.

7. Докажите, что для любых подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_6 \subseteq \{0, 1, \dots, 2017\}$ справедливо следующие. Для каких-то трёх подмножеств A_i, A_j, A_k выполняется $A_i \triangle A_j = A_i \triangle A_k = A_j \triangle A_k = \emptyset$ или для каких-то трёх подмножеств A_p, A_q, A_r выполняется $A_p \triangle A_q \neq \emptyset, A_p \triangle A_r \neq \emptyset, A_q \triangle A_r \neq \emptyset$.

8. Пусть G – двудольный граф, с долями L и R , $|L| = |R| = n$, и множеством рёбер E . Степень каждой вершины $v \in L \cup R$ равна 2. Докажите, что существует биекция $f : L \rightarrow R$, такая что $f(u) = v$, если $\{u, v\} \in E$.