Неделя 9. Ориентированные графы и порядки

О терминологии. Ациклический граф — это ориентированный граф без простых циклов длины больше 1.

Два графа $G = \langle V, E\rangle$ и $G' = \langle V', E'\rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $(u, v) \in E \iff (f(u), f(v)) \in E'$.

Вершинами графа, который называется *ориентированный булев куб размерности* n и обозначается OB_n, являются двоичные слова длины n, а ребро (a, b) есть между такими вершинами $a = a_1a_2 \dots a_n$ и $b = b_1b_2 \dots b_n$, что они различаются ровно в одной позиции – под номером i и $a_i = 0, b_i = 1$.

Отношением частичного порядка (порядком) называют антисимметричное и транзитивное отношение $P \subseteq A \times A$, которое либо рефлексивно, либо антирефлексивно. В первом случае отношение порядка называют *нестрогим* и обозначают $\leqslant$, а во втором – строгим и *обозначают* $<$. Каждому отношению порядка $<$ ставят в соответсвие отношение *непосредственного следования*

$$S_< = \{(x, y) \mid (x < y) \wedge \neg(\exists z : x < z \wedge z < y)\}.$$

Положим $S_\leqslant = S_<$, где $<$ – строгий порядок, соответсвующий нестрогому $\leqslant$.

Порядок $P \subseteq A \times A$, для которого граф $\langle A, S_P\rangle$ изоморфен булеву кубу OB_n называется *покоординатным порядком.* Отношения частичного порядка $\leqslant_P \subseteq A \times A$ и $\leqslant_Q \subseteq B \times B$ называются изоморфными, если существует такая биекция $f : A \to B$, что $x \leqslant_P y \iff f(x) \leqslant_Q f(y)$

1. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

2. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.

3. а) 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.

б) Является ли отношение «сильнее» отношением порядка на множестве команд?

4. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2, 3\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $\langle V, S_P\rangle$ для каждого порядка и докажите, что среди этих порядков есть порядок, изоморфный покоординатному порядку на множестве $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$.

5. Верно ли, что если P – отношение частичного порядка, то следующие отношения также будут задавать частичные порядки: **а)** P^{-1}; **б)** $\bar{P}$?

6. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

7. Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

8. Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f — некоторая функция (определённая на всех числах).

а) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).

б) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 9

1. Последовательность чисел определена рекуррентно: $a_0 = 5$; $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Найдите последнюю цифру числа a_{2017}.

2. Известно, что в неориентированном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?

3. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n - 2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.

4. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v), либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть простой путь, включающий в себя все вершины.

5. Профессор Рассеянный построил частичный порядок $<_P$ для утреннего одевания:

очки $<_P$ *брюки* $<_P$ *ремень* $<_P$ *пиджак,*

очки $<_P$ *рубашка* $<_P$ *галстук* $<_P$ *пиджак,*

брюки $<_P$ *туфли,*

очки $<_P$ *носки* $<_P$ *туфли,*

очки $<_P$ *часы.*

а) Постройте линейный порядок на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен.

б) Сколько всего существует таких линейных порядков?

6. В Вестеросе n городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Докажите, что

а) волшебник может это сделать;

б) найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует единственный путь, обходящий все города.

г) Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение?

7. Бинарное отношение P называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и связно. (Неформально — это результат кругового турнира — каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир — строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы a, b, c, что aPb, bPc и cPa.

8. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

9. Докажите, что отношение $\subseteq$ на множестве $2^{\{1,\ldots,n\}}$ всех подмножеств n-элементного множества является отношением частичного порядка и изоморфно нестрогому покоординатному порядку.