Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 11. Арифметика остатков II

Преамбула. Если в задаче просят найти количество сравнений (или количество решений уравнения), то речь идёт о количестве остатков по указанному модулю (или, что тоже самое, о количестве вычетов).

1. Найдите количество решений сравнения $39x \equiv 104 \pmod{221}$.

2. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.

3. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111\ldots111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)

4. Пусть НОД$(a,b) = 1$. Найдите все возможные значения НОД$(a+b, a^2+b^2)$.

5. Решите систему сравнений

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{13},\\ x &\equiv 4 \pmod{14},\\ x &\equiv 5 \pmod{15}. \end{aligned}$$

6. Решите систему сравнений

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{15},\\ x &\equiv 4 \pmod{21},\\ x &\equiv 5 \pmod{35}. \end{aligned}$$

7. Найдите остатки от деления **а)** 19^{10} на 66; **б)** 19^{14} на 70; **в)** 17^9 на 48; **г)** $14^{14^{14}}$ на 100.

8. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства

а) $\text{НОК}(x,y) = \dfrac{xy}{\text{НОД}(x,y)}$;

б) $\text{НОК}(x,y,z) = \dfrac{xyz \cdot \text{НОД}(x,y,z)}{\text{НОД}(x,y) \cdot \text{НОД}(x,z) \cdot \text{НОД}(y,z)}$;

в) попробуйте выразить НОК$(x_1, \ldots, x_n)$ аналогичным образом.

9. Решите уравнение **а)** $\varphi(x) = x/3$; **б)** $\varphi(x) = x/4$.

10. Докажите, что $(p-1)!$ дает остаток -1 по модулю p для любого простого числа p.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 11

1. Докажите, что если НОД(a, b) = НОД$(a, c) = 1$, то НОД$(a, bc) = 1$.

2. Найдите вычет, обратный к 74 по модулю 47.

3. Существует ли решение уравнения $31x + 75y = 2345$ в неотрицательных целых числах?

4. Найдите количество положительных целых чисел, не превосходящих 10800, и взаимно простых с этим числом.

5. Найдите НОД$(3^{168} - 1, 3^{140} - 1)$.

6. Решите сравнение $x^3 \equiv x \pmod{125}$. (Решить сравнение по модулю q — найти все вычеты по модулю q, которые обращают данное сравнение в истинное.)

7. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.

8. Докажите, что при любом k существует ровно 4 решения сравнения $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$.

9. Вычислить $9^{6^{3979}} \bmod 19$.

10. (9 задача задания 10.) Докажите, что при любом нечетном положительном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

Срок, отведённый на решение этой задачи, продлён. При решении можно использовать факты обеих лекций по теории чисел, однако решение, использующее только материал первой лекции, даёт бонус (+1 задача к заданию 10).