

Неделя 13. Несчётные мощности

1. Пусть множества A и B равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.
2. Докажите, что множество \mathbb{R}^k равномощно \mathbb{R} .
3. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из **а)** 0, 1, 2, 3; **б)** 0, 1, 2; **в)** произвольных натуральных чисел.
5. Установите взаимно однозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.
6. Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей.)
7. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно \mathbb{R} .
8. Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$, в которых
 - а) каждый отрезок чётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k-1}$ содержит поровну нулей и единиц?
 - б) каждый отрезок нечётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$ содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?
9. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств \mathbb{R} ?
10. Верно ли, что множество функций $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум?
11. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

Домашнее задание 12 (часть 2)

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Пусть A – точка на плоскости. Рассмотрим множество всех окружностей с центром в A . Верно ли, что это множество имеет мощность континуум?
2. Докажите, что множество интервалов на прямой имеет мощность континуум.
3. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Верно ли, что мощность множества таких последовательностей имеет мощность континуум?
4. Верно ли, что множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум?